

Γενικευμένο Πεπερασμένο Στοιχείο Δοκού επί Ελαστικού Υποβάθρου WINKLER

Ι. Ε. ΑΒΡΑΜΙΔΗΣ
Καθηγητής Α.Π.Θ.

Κ. ΜΟΡΦΙΔΗΣ
Διπλ. Πολιτικός Μηχανικός

Περίληψη

Στο άρθρο αυτό αναπτύσσονται το μητρώο δυσκαμψίας και τα μητρώα φόρτισης ενός πεπερασμένου στοιχείου δοκού με συνεχή ελαστική έδραση τύπου Winkler και με δυνατότητα επιλεκτικής θεώρησης διατμητικών παραμορφώσεων, ημιάκαμπτων συνδέσεων και απολύτως στερεών βραχιόνων στα άκρα του. Τα μητρώα φόρτισης περιλαμβάνουν το ομοιόμορφο φορτίο q καθώς και τη μεταβολή θερμοκρασίας Δt μεταξύ της άνω και κάτω ίνας της διατομής του στοιχείου. Το νέο αυτό στοιχείο χαρακτηρίζεται ως γενικευμένο, επειδή είτε μηδενίζοντας κάποιους συντελεστές στο μητρώο δυσκαμψίας του είτε σχηματίζοντας τις οριακές τιμές τους προκύπτουν κατ' επιλογή τα ειδικότερα μητρώα δυσκαμψίας και φορτίου (α) της κλασικής απλής δοκού Bernoulli ή Timoshenko, (β) της κλασικής δοκού με άκαμπτους βραχίονες στο αριστερό ή/και δεξιά άκρο της, (γ) της ελαστικώς εδραζόμενης δοκού με άκαμπτους ή και χωρίς άκαμπτους βραχίονες και (δ) της απλής δοκού με ημιάκαμπτες συνδέσεις και άκαμπτους βραχίονες. Οι δυνατότητες αυτές καθιστούν το γενικευμένο αυτό στοιχείο ιδιαίτερα χρήσιμο σε προγράμματα H/Y ανάλυσης κατασκευών, όπου με κατάλληλους «διακόπτες» μπορεί να παράγεται το εκάστοτε επιθυμητό στοιχείο. Η χρησιμότητα του νέου στοιχείου κατά την επίλυση φορέων από σκυρόδεμα ή χάλυβα τεκμηριώνεται με την παράθεση δύο αριθμητικών παραδειγμάτων.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κατά την προσομοίωση και εν συνεχεία επίλυση κατασκευών από οπλισμένο σκυρόδεμα ή από χάλυβα προκύπτουν στην πράξη ορισμένα προβλήματα, τα οποία μπορούν να αντιμετωπισθούν αποτελεσματικότερα με χρήση γραμμικών πεπερασμένων στοιχείων καταλληλότερων του απλού κλασικού στοιχείου δοκού Bernoulli. Τέτοια προβλήματα είναι παραδείγματος χάριν τα εξής:

α. Στις συχνά εμφανιζόμενες περιπτώσεις θεμελίωσης επί ενδοσίμου εδάφους, το πρώτο θέμα που ανακύπτει είναι η προσομοίωση της ενδοσιμότητας του εδάφους θεμελίωσης. Μια πρώτη προσέγγιση του προβλήματος, η οποία θα υιοθετηθεί και στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, αποτελεί η χρήση του γνωστού μοντέλου του Winkler [1], που θεωρεί το έδαφος ως γραμμικώς ελαστικό και ως παραμορφούμενο μόνον εκεί όπου δρα κατακόρυφο φορτίο, δηλαδή μόνον

κάτω από τις επιφάνειες των πελμάτων. Αν και το εδαφικό αυτό μοντέλο μπορεί να θεωρηθεί επαρκές σε πολλές περιπτώσεις της συμβατικής καθημερινής πράξης, υπάρχουν και άλλα μοντέλα που αποδίδουν ρεαλιστικότερα τη συμπεριφορά του εδάφους, όπως π.χ. τα μοντέλα δύο ή περισσοτέρων παραμέτρων (βλ. π.χ. [29] – [32]), το μοντέλο του ελαστικού ημιχώρου (βλ. π.χ. [33], [34]) κ.ά., τα οποία όμως σπανίως εφαρμόζονται σε μελέτες συμβατικών κατασκευών.

β. Για την ανάλυση ενός φορέα θεμελίωσης επί ενδοσίμου εδάφους Winkler (ο οποίος, στην πλειονότητα ίσως των περιπτώσεων, συντίθεται είτε από πέδιλα με συνδετήριες δοκούς είτε από εσχάρα πεδιλοδοκών) οφείλουν να χρησιμοποιηθούν πεπερασμένα στοιχεία δοκού με συνεχή ελαστική έδραση. Παράλληλα, πρέπει να ληφθεί υπόψη και το γεγονός ότι στα σημεία σύνδεσης των συνδετήριων δοκών με τα υποστυλώματα ή τοιχώματα παρεμβάλλονται ενδεχομένως και πέδιλα, τα οποία είναι δομικά στοιχεία με πολύ μεγάλη δυσκαμψία. Προκύπτει επομένως η ανάγκη να ληφθεί υπόψη η επιρροή των πρακτικώς άκαμπτων πεδίων στις τιμές των εντατικών μεγεθών που θα χρησιμοποιηθούν για την τελική διαστασιολόγηση τόσο στα άκρα των συνδετήριων δοκών όσο και στους πόδες των υποστυλωμάτων ή τοιχωμάτων. Τα παραπάνω δύο προβλήματα αντιμετωπίζονται συχνά στην πράξη με χρήση του απλού κλασικού πεπερασμένου στοιχείου δοκού ως εξής: Η συνεχής ελαστική έδραση της πεδιλοδοκού αντικαθίσταται από ικανό αριθμό μεμονωμένων ελατηρίων, μεταξύ των οποίων τοποθετείται ένα απλό κλασικό στοιχείο δοκού, ενώ οι περιοχές, που θεωρούνται άκαμπτες, προσομοιώνονται με κλασικά πεπερασμένα στοιχεία δοκού, στα οποία όμως προσδίδονται πολύ μεγάλες τιμές για τη ροπή αδράνειας σε κάμψη. Κατά την πρακτική αυτή αντιμετώπιση, αφ' ενός δημιουργούνται αποκλίσεις από την ορθή λύση λόγω της διακριτοποίησης της συνεχούς ελαστικής έδρασης και αφ' ετέρου είναι δυνατόν – λόγω των μεγάλων τιμών που εισάγονται για την προσομοίωση των άκαμπτων τμημάτων – να προκληθούν αριθμητικές αστάθειες κατά την επίλυση.

Εξάλλου, η προαναφερθείσα διακριτοποίηση της συνεχούς ελαστικής έδρασης αυξάνει, σε όχι αμελητέο ποσοστό, τον απαιτούμενο αριθμό κόμβων και στοιχείων, και άρα τον χρόνο προεπεξεργασίας δεδομένων, επίλυσης εξισώσεων και μετεπεξεργασίας των αποτελεσμάτων.

Τα παραπάνω προβλήματα αντιμετωπίζονται λυσιτελώς στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας με τη θεώρηση ενός νέου πεπερασμένου στοιχείου δοκού, το οποίο αφ' ενός ενσωματώνει τους εκατέρωθεν άκαμπτους βραχίονες και αφ' ετέρου κάνει χρήση των αναλυτικών λύσεων των διαφορικών εξισώσεων της ελαστικώς εδραζομένης δοκού. Προκύπτουν έτσι αναλυτικώς ακριβή μητρώα δυσκαμψίας που δίνουν τη δυνατότητα προσομοίωσης ενός φαντώματος με ένα μόνο στοιχείο δοκού.

γ. Παράλληλα με τα παραπάνω προβλήματα μπορεί να θεωρηθεί αναγκαία η θεώρηση και των διατμητικών παραμορφώσεων των δοκών, αφού πολλές συνδετήριες δοκοί έχουν σχετικά μεγάλο λόγο ύψους διατομής προς το μήκος τους. Επομένως, μπορεί να απαιτηθεί η χρήση στοιχείων βασισμένων στη δοκό Timoshenko και όχι στην κλασική δοκό Bernoulli.

δ. Επίσης, η ανάλυση κατασκευών από χάλυβα εισάγει ορισμένα προβλήματα προσομοίωσης των κόμβων σύνδεσης δοκών και στύλων. Ένα από αυτά οφείλεται στο ότι οι συνδέσεις αυτές δεν είναι πάντοτε τελείως άκαμπτες και επομένως θα πρέπει να προσομοιωθεί με ικανοποιητικό τρόπο η ενδοσιμότητά τους. Αυτό μπορεί να γίνει κατά μία πρώτη προσέγγιση, που συχνά κρίνεται επαρκής στην πράξη, με στοιχεία, τα οποία έχουν στροφικά ελαστικά ελατήρια στα άκρα τους. Αν μάλιστα θελήσει κανείς να λάβει υπόψη του την ακαμψία των ίδιων των κόμβων, τότε θα πρέπει να έχει στη διάθεσή του ένα πεπερασμένο στοιχείο με άκαμπτα τμήματα, των οποίων τα άκρα συνδέονται με το εσωτερικό (πεπερασμένης δυσκαμψίας) τμήμα του στοιχείου μέσω στροφικών ελατηρίων (ημιάκαμπτες συνδέσεις). Αξίζει να σημειωθεί ότι ακόμα και σε ελαστοπλαστικές αναλύσεις είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν στοιχεία με στροφικά ελατήρια στα άκρα τους, αν θεωρηθεί ότι η ανελαστική συμπεριφορά των στοιχείων συγκεντρώνεται στις συνδέσεις τους και ότι τα ελατήρια ακολουθούν τον κατάλληλο ανελαστικό νόμο ροπής – καμπυλότητας. Μια τέτοια ανάλυση μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια αλγορίθμου, ο οποίος μεταβάλλει τις δυσκαμψίες των στροφικών ελατηρίων σε κάθε αύξηση της φόρτισης [2].

Στα παραπάνω εκτεθέντα προβλήματα $\alpha - \delta$ έχουν δοθεί κατά καιρούς ορισμένες λύσεις, που όμως αφορούν όχι στο σύνολό τους αλλά μεμονωμένα το κάθε ένα από αυτά.

Όσον αφορά στις δοκούς επί ελαστικού υποβάθρου τύπου Winkler, υπάρχει πληθώρα δημοσιεύσεων πάνω στη βάση της ακριβούς λύσης των διαφορικών εξισώσεων του προβλή-

ματος. Ξεκινώντας από το κλασικό σύγγραμμα του Hetenyi [3], πολλές εργασίες έχουν δημοσιευτεί με θέμα τη δοκό Bernoulli επί ελαστικού εδάφους είτε στο πλαίσιο της θεωρίας α' τάξης είτε στο πλαίσιο της θεωρίας β' τάξης (βλ. π.χ. [4] - [14]). Για τη δοκό Timoshenko επί ελαστικού εδάφους υπάρχει επίσης σειρά εργασιών που αντιμετωπίζουν το πρόβλημα τόσο με ακριβείς όσο και με προσεγγιστικές λύσεις (βλ. π.χ. [15] - [18]). Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις δεν γίνεται θεώρηση ούτε άκαμπτων βραχιόνων ούτε ημιάκαμπτων συνδέσεων.

Το πρόβλημα των δοκών με ημιάκαμπτες συνδέσεις αφορά κυρίως, αλλά όχι αποκλειστικά, στην ανάλυση μεταλλικών κατασκευών (βλ. π.χ. [19] - [26]), στις οποίες, όπως έχει αποδειχθεί από σειρές σχετικών πειραμάτων, σπανιότατα οι συνδέσεις συμπεριφέρονται ως ιδανικές πακτώσεις (ή ως ιδανικές αρθρώσεις) [23]. Το πρόβλημα της κατάλληλης προσομοίωσης τέτοιων συνδέσεων έχει αντιμετωπιστεί στο παρελθόν ανεξάρτητα από τυχόν συνεχή ελαστική στήριξη των δοκών.

Η ενσωμάτωση άκαμπτων βραχιόνων σε πεπερασμένα στοιχεία δοκών έχει αποτελέσει αντικείμενο αρκετών εργασιών (βλ. π.χ. [27]). Τέτοιου είδους πεπερασμένα στοιχεία είναι μάλιστα ενσωματωμένα και σε ορισμένα προγράμματα ανάλυσης κατασκευών (π.χ. [28]). Τα στοιχεία, όμως, αυτά αφορούν πάντοτε στην απλή κλασική δοκό και όχι δοκούς εδραζόμενες επί ελαστικού υποβάθρου.

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός νέου γενικευμένου στοιχείου, το οποίο να ενσωματώνει όλες τις παραπάνω ιδιότητες και απαιτήσεις. Συγκεκριμένα, αναπτύσσονται το μητρώο δυσκαμψίας και τα μητρώα φόρτισης ενός πεπερασμένου στοιχείου δοκού με συνεχή ελαστική έδραση τύπου Winkler και με δυνατότητα επιλεκτικής θεώρησης διατμητικών παραμορφώσεων, ημιάκαμπτων συνδέσεων και απολύτως στερεών βραχιόνων στα άκρα του. Τα μητρώα φόρτισης περιλαμβάνουν το ομοιόμορφο φορτίο q καθώς και τη μεταβολή θερμοκρασίας Δt μεταξύ της άνω και κάτω ίνας της διατομής του στοιχείου. Το νέο αυτό στοιχείο χαρακτηρίζεται ως *γενικευμένο*, επειδή είτε μηδενίζοντας κάποιους συντελεστές στο μητρώο δυσκαμψίας του είτε σχηματίζοντας τις οριακές τιμές τους προκύπτουν κατ' επιλογή τα ειδικότερα μητρώα δυσκαμψίας και φορτίου:

- (α) της κλασικής απλής δοκού Bernoulli ή Timoshenko,
- (β) της κλασικής δοκού με άκαμπτους βραχίονες στο αριστερό ή/και δεξιό άκρο της,
- (γ) της ελαστικώς εδραζόμενης δοκού με άκαμπτους ή χωρίς άκαμπτους βραχίονες και
- (δ) της κλασικής δοκού με άκαμπτους βραχίονες και ημιάκαμπτες συνδέσεις.

Οι δυνατότητες αυτές καθιστούν το γενικευμένο αυτό στοιχείο ιδιαίτερα χρήσιμο σε προγράμματα H/Y ανάλυσης

κατασκευών, όπου με κατάλληλους «διακόπτες» μπορεί να παράγεται το εκάστοτε επιθυμητό στοιχείο. Η χρησιμότητα του νέου στοιχείου κατά την επίλυση φορέων από σκυρόδεμα ή χάλυβα τεκμηριώνεται με την παράθεση δύο αριθμητικών παραδειγμάτων.

2. ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

E	Μέτρο ελαστικότητας
G	Μέτρο διάτμησης
h	Ύψος της διατομής
I	Ροπή αδράνειας της διατομής
F	Επιφάνεια της διατομής
F'	Τεκμαρτή επιφάνεια ολίσθησης της διατομής
η	Συντελεστής διάτμησης
$K_{\Phi A}$	Σταθερά του αριστερού στροφικού ελατηρίου
$K_{\Phi B}$	Σταθερά του δεξιού στροφικού ελατηρίου
K_S	Δείκτης εδάφους
L	Μήκος του μεσαίου τμήματος του στοιχείου
φ	Γωνία στροφής της διατομής λόγω κάμψης
γ	Γωνία ολίσθησης της διατομής
u	Εγκάρσια μετατόπιση
q	Ομοιόμορφο φορτίο
K_{ij}	Συντελεστές του μητρώου δυσκαμψίας του μεσαίου τμήματος στοιχείου
K^0_{ij}	Συντελεστές του μητρώου δυσκαμψίας όλου του στοιχείου
d_1	Μήκος απολύτως στερεού βραχίονα στο αριστερό τμήμα του στοιχείου
d_2	Μήκος απολύτως στερεού βραχίονα στο δεξιό τμήμα του στοιχείου
$\Delta\varphi_1$	Άλμα της καμπτικής γωνίας στροφής της διατομής στον κόμβο 2 λόγω της ημιάκαμπτης σύνδεσης
$\Delta\varphi_2$	Άλμα της καμπτικής γωνίας στροφής της διατομής στον κόμβο 3 λόγω της ημιάκαμπτης σύνδεσης
Δt	Θερμοκρασιακή μεταβολή μεταξύ άνω και κάτω ίνας του στοιχείου
α	Συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας
b_δ	Πλάτος της συνδετήριας δοκού
$b_{\pi 1}$	Πλάτος του αριστερού πεδύλου
$b_{\pi 2}$	Πλάτος του δεξιού πεδύλου

3. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΝΕΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ

Το νέο στοιχείο δίνεται στο σχήμα 1δ. Το στοιχείο αυτό είναι ένα στοιχείο δοκού που αποτελείται από 3 τμήματα: Το τμήμα (1-2) που είναι απολύτως στερεό (δηλαδή $EF, EI, GF' \rightarrow \infty$), το τμήμα (2-3) με $EI, GF' = \text{πεπ.}$ και $EF \rightarrow \infty$, και το τμήμα (3-4) που είναι επίσης απολύτως στερεό. Η σύνδεση του τμήματος (2-3) με τα τμήματα (1-2) και (3-4) υλοποιεί-

ται μέσω στροφικών ελατηρίων με ελατηριακές σταθερές $K_{\Phi A}, K_{\Phi B}$ αντιστοίχως.

Καθ' όλο το μήκος του το στοιχείο εδράζεται επάνω σε ελαστικό υπόβαθρο τύπου Winkler (ελαστικό υπόβαθρο μιας παραμέτρου) με δείκτη εδάφους K_S .

4. ΤΟ ΜΗΤΡΩΟ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ

Η ανάπτυξη του νέου γενικού τύπου στοιχείου πραγματοποιείται σε δύο στάδια. Κατά το πρώτο στάδιο αναπτύσσεται το μητρώο δυσκαμψίας του μεσαίου τμήματος του στοιχείου, το οποίο, στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, λαμβάνεται από τη βιβλιογραφία [11, 17]. Κατά το δεύτερο στάδιο (που είναι και το αντικείμενο της παρούσας εργασίας) καταστρώνονται οι σχέσεις που συνδέουν τους συντελεστές του μητρώου δυσκαμψίας του μεσαίου τμήματος με τα μεγέθη μετατόπισης των άκρων του στοιχείου. Με τη βοήθεια των σχέσεων αυτών λαμβάνεται υπόψη αφ' ενός η επιρροή των στροφικών ελατηρίων και αφ' ετέρου η επιρροή των απολύτως στερεών και επίσης ελαστικώς εδραζόμενων βραχιόνων.

4.1. Μεσαίο τμήμα

4.1.1. Δοκός Bernouli

Το μητρώο δυσκαμψίας δοκού Bernouli εδραζόμενης επί ελαστικού υποβάθρου τύπου Winkler αναπτύσσεται με βάση την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης [3]:

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} + (K_S b_\delta) u = 0 \quad (4.1)$$

Η επίλυση της εξίσωσης αυτής μπορεί να γίνει είτε με τη βοήθεια προσεγγιστικών μεθόδων (π.χ. μέθοδος πεπερασμένων διαφορών) είτε αναλυτικά, οπότε προκύπτει και η αναλυτικώς ακριβής λύση. Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας θα χρησιμοποιηθούν η ακριβής λύση της (4.1) και το αντίστοιχο ακριβές μητρώο δυσκαμψίας.

4.1.2. Δοκός Timoshenko

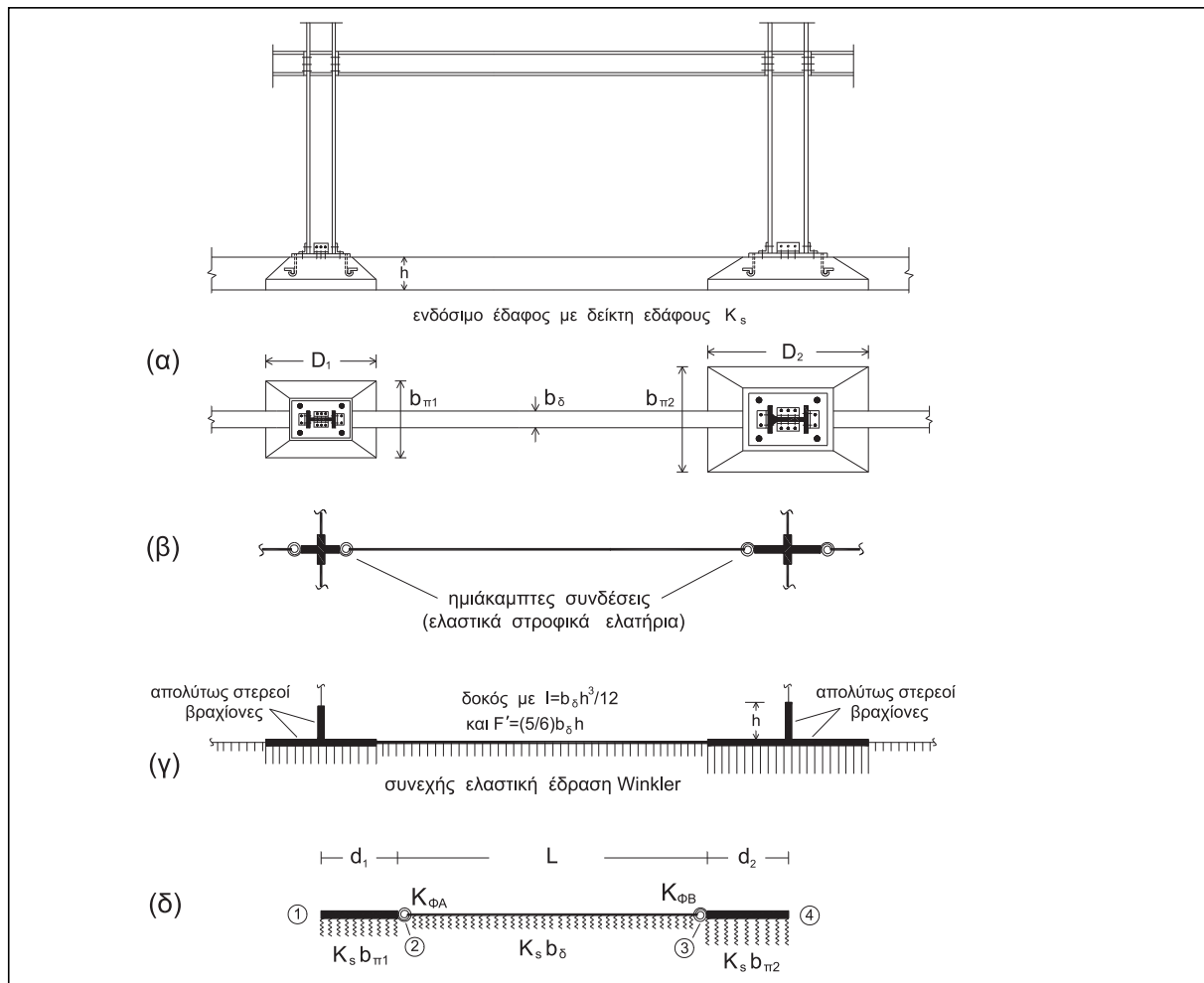
Το μητρώο δυσκαμψίας της δοκού Timoshenko εδραζόμενης επί ελαστικού υποβάθρου τύπου Winkler αναπτύσσεται με βάση την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων [17]:

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} - \left(\frac{EI K_S b_\delta}{\Phi} \right) \frac{d^2 u}{dx^2} + (K_S b_\delta) u = 0 \quad (4.2\alpha)$$

$$EI \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - \left(\frac{EI K_S b_\delta}{\Phi} \right) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + (K_S b_\delta) \varphi = 0 \quad (4.2\beta)$$

(Στις παραπάνω εξισώσεις έχει τεθεί: $\Phi = GF'$).

Όπως και στην περίπτωση της δοκού Bernouli, έτσι και στην παρούσα περίπτωση υπάρχει στη βιβλιογραφία η μεθο-



Σχήμα 1: α. Μεταλλικό πλαίσιο με φορέα θεμελίωσης από οπλισμένο σκυρόδεμα.

β. Απλοποιημένο προσομοίωμα του μεταλλικού ζυγώματος.

γ. Απλοποιημένο προσομοίωμα του φορέα θεμελίωσης.

δ. Το νέο, γενικού τύπου, πεπερασμένο στοιχείο δοκού.

Figure 1: a. Steel frame on reinforced concrete foundation.

b. Simplified model of the steel girder.

c. Simplified foundation model.

d. The new generalized finite beam element.

δολογία της αναλυτικής επίλυσης των εξισώσεων (4.2α, 4.2β) καθώς και το αντίστοιχο αναλυτικώς ακριβές μητρώο δυσκαμψίας [17, 18]. Σημειώνεται εδώ ότι η μορφή της ακριβούς αναλυτικής λύσης αλλάζει σε εξάρτηση από τα πεδία τιμών, μέσα στα οποία κινούνται τα μεγέθη EI , K_s , b_δ και Φ , λόγω του ότι αυτά επηρεάζουν τους συντελεστές των διαφορικών εξισώσεων (4.2α) και (4.2β) (βλ. και παράγρ. 5.1.1.1.).

4.2. Θεώρηση όλου του στοιχείου

Έχοντας ως δεδομένο το μητρώο δυσκαμψίας του μεσαίου τμήματος του στοιχείου (είτε αυτό αναφέρεται σε δοκό Bernouli είτε σε δοκό Timoshenko) ξεκινάει το δεύτερο στάδιο της διαδικασίας ανάπτυξης του μητρώου δυσκαμψίας του

προτεινόμενου στοιχείου. Κατά το στάδιο αυτό θα καταστροφθούν οι σχέσεις που συνδέουν τους συντελεστές του μητρώου δυσκαμψίας του μεσαίου τμήματος με τα μεγέθη μετατόπισης των άκρων του στοιχείου.

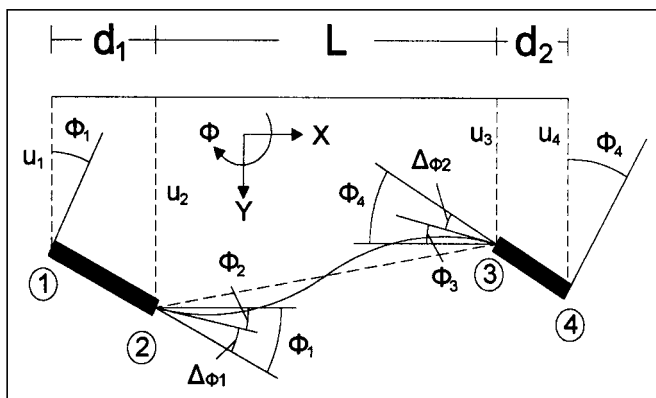
4.2.1. Σχέσεις μετακινήσεων

Οι σχέσεις, που συνδέουν τις μετατοπίσεις των εξωτερικών (ακραίων) κόμβων 1 και 4 του στοιχείου με τις αντίστοιχες μετατοπίσεις των εσωτερικών κόμβων του 2 και 3, είναι (σχήμα 2):

$$u_2 = u_1 + \varphi_1 d_1 \quad (4.3)$$

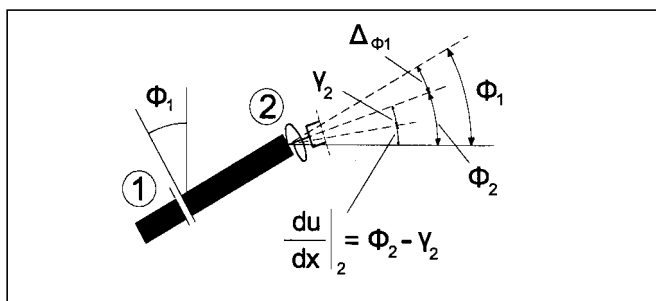
$$\varphi_2 = \varphi_1 - \Delta \varphi_1 \quad (4.4)$$

$$u_3 = u_4 - \varphi_4 d_2 \quad (4.5)$$



Σχήμα 2: Η παραμορφωμένη κατάσταση του στοιχείου. Δοκός Bernoulli.

Figure 2: Deformed configuration of the element. Bernoulli beam.



Σχήμα 3: Λεπτομέρεια του κόμβου σύνδεσης του μεσαίου τμήματος με τον απολύτως στερεό βραχίονα στην περίπτωση της δοκού Timoshenko.

Figure 3: Detail of the connection joint between the middle part of the beam and the rigid offset in case of a Timoshenko beam.

$$\varphi_3 = \varphi_4 - \Delta\varphi_2 \quad (4.6)$$

Για την περίπτωση της δοκού Timoshenko πρέπει να τονιστεί το εξής: Ενώ στο μεσαίο τμήμα του στοιχείου, εξαιτίας της επιρροής των διατμητικών παραμορφώσεων, η κλίση της ελαστικής γραμμής du/dx δεν ταυτίζεται με την καμπτική στροφή των διατομών φ (βλ. σχήμα 3), στα απολύτως στερεά ακραία τμήματα του στοιχείου τα δύο αυτά μεγέθη ταυτίζονται: $du/dx \equiv \varphi$. Ωστόσο, ως βαθμός ελευθερίας λαμβάνεται εδώ η καμπτική στροφή των διατομών. Η επιλογή αυτή δεν έχει ουσιαστικό χαρακτήρα και γίνεται, επειδή το μητρώο δυσκαμψίας της δοκού Timoshenko ανα-

πτύσσεται κατά κανόνα με θεώρηση ως βαθμών ελευθερίας των καμπτικών στροφών των διατομών και όχι της κλίσης της ελαστικής γραμμής [17]. Σημειώνεται, επίσης, ότι τα μεγέθη $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$ οφείλονται στο γόνατο που εμφανίζει το διάγραμμα των καμπτικών γωνιών στροφής των διατομών στους κόμβους 2 και 3 εξαιτίας της ύπαρξης εκεί των στροφικών ελατηρίων.

Οι σχέσεις (4.3) - (4.6) μπορούν να γραφούν σε μητρωική μορφή ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \varphi_2 \\ u_2 \\ \varphi_3 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -d_2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ u_1 \\ \varphi_4 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Delta\varphi_1 \\ 0 \\ -\Delta\varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Για τα μεγέθη $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$, που αναφέρονται στα στροφικά ελατήρια, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{M_2}{K_{\varphi A}} \quad \text{και} \quad \Delta\varphi_2 = \frac{M_3}{K_{\varphi B}} \quad (4.8)$$

4.2.2. Σχέσεις των εντατικών μεγεθών

Οι σχέσεις, που συνδέουν τα εντατικά μεγέθη των κόμβων 1 και 4 με τα μεγέθη των εσωτερικών κόμβων 2 και 3 αντίστοιχα, είναι (σχήμα 4):

$$V_1 = V_2 + (1/2)(K_S b_{\pi 1})(2u_1 + \varphi_1 d_1) d_1 \quad (4.9)$$

$$M_1 = M_2 + V_2 d_1 + (1/6)(K_S b_{\pi 1})(3u_1 + 2\varphi_1 d_1) d_1^2 \quad (4.10)$$

$$V_4 = V_3 + (1/2)(K_S b_{\pi 2})(2u_4 - \varphi_4 d_2) d_2 \quad (4.11)$$

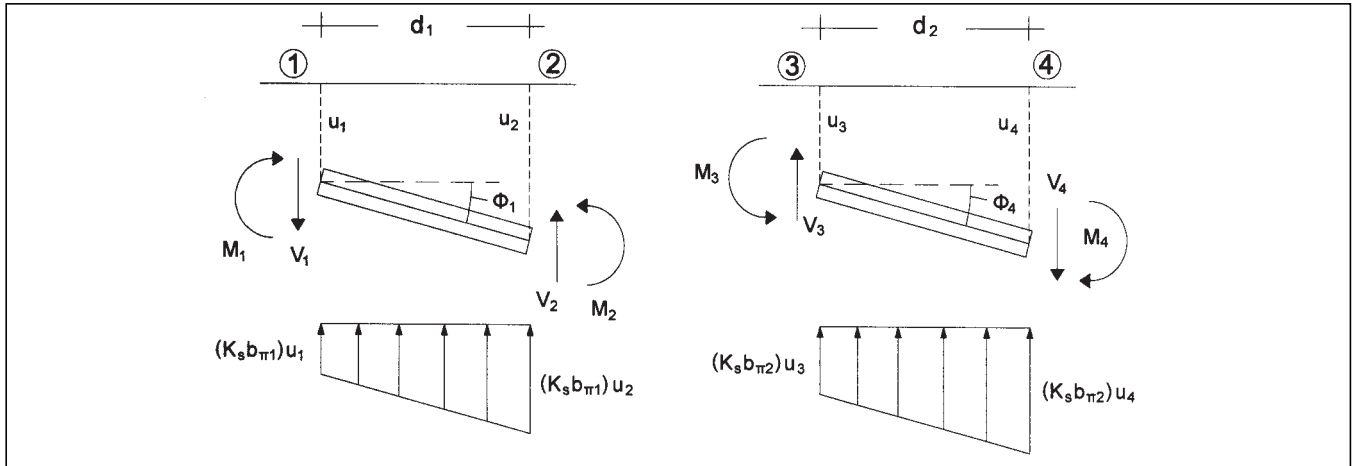
$$M_4 = M_3 - V_3 d_2 - (1/6)(K_S b_{\pi 2})(3u_4 - 2\varphi_4 d_2) d_2^2 \quad (4.12)$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να αποδοθούν σε μητρωική μορφή όπως στη σχέση 4.13.

4.2.3. Σχέσεις μεγεθών έντασης και μεγεθών μετακίνησης

Εφαρμόζοντας την κλασική σχέση της μητρωικής στατικής $S=K*U$ για όλο το στοιχείο (του οποίου το μητρώο δυσκαμψίας πρόκειται να αναπτυχθεί) καθώς και για το μεσαίο τμήμα χωρίς τα στροφικά ελατήρια στα άκρα (του οποίου το μητρώο δυσκαμψίας είναι γνωστό από τη βιβλιογραφία), έχουμε (σχέσεις 4.14α, 4.14β):

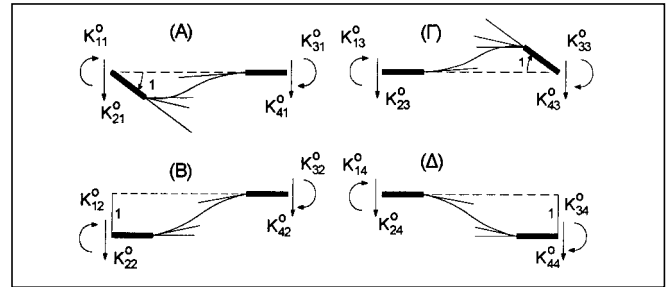
$$\begin{bmatrix} M_1 \\ V_1 \\ M_4 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} M_2 \\ V_2 \\ M_3 \\ V_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(K_S b_{\pi 1})d_1^3 & \frac{1}{2}(K_S b_{\pi 1})d_1^2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(K_S b_{\pi 1})d_1^2 & (K_S b_{\pi 1})d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(K_S b_{\pi 2})d_2^3 & -\frac{1}{2}(K_S b_{\pi 2})d_2^2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(K_S b_{\pi 2})d_2^2 & (K_S b_{\pi 2})d_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ u_1 \\ \varphi_4 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$



Σχήμα 4: Σχέσεις εντατικών μεγεθών των εσωτερικών κόμβων του στοιχείου με τα αντίστοιχα μεγέθη των εξωτερικών κόμβων.
Figure 4: Relationships between the forces at the internal joints and the element end forces.

$$\begin{Bmatrix} M_2 \\ V_2 \\ M_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ u_2 \\ \Phi_3 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (4.14\alpha)$$

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ V_1 \\ M_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^o & K_{12}^o & K_{13}^o & K_{14}^o \\ K_{21}^o & K_{22}^o & K_{23}^o & K_{24}^o \\ K_{31}^o & K_{32}^o & K_{33}^o & K_{34}^o \\ K_{41}^o & K_{42}^o & K_{43}^o & K_{44}^o \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ u_1 \\ \Phi_4 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (4.14\beta)$$



Σχήμα 5: Οι τέσσερις μοναδιαίες καταστάσεις.
Figure 5: The four unit displacements.

4.2.4. Ανάπτυξη του μητρώου δυσκαμψίας

Η ανάπτυξη του μητρώου δυσκαμψίας θα γίνει με εφαρμογή των σχέσεων (4.3) - (4.14) για κάθε μία από τις τέσσερις «μοναδιαίες» καταναγκασμένες μετακινήσεις των άκρων του (σχήμα 5):

Παρακάτω παρουσιάζεται ενδεικτικά ο υπολογισμός για τη μοναδιαία κατάσταση (Δ), ο οποίος οδηγεί στον προσδιορισμό των στοιχείων K_{i4}^o ($i=1-4$) του μητρώου δυσκαμψίας.

Από τις σχέσεις των εντατικών μεγεθών προκύπτουν:

$$(4.9) \Rightarrow V_1 = V_2 \quad (4.15)$$

$$(4.10) \Rightarrow M_1 = M_2 + V_2 d_1 \quad (4.16)$$

$$(4.11) \Rightarrow V_4 = V_3 + (K_S b_{\pi 2}) d_2 \quad (4.17)$$

$$(4.12) \Rightarrow M_4 = M_3 - V_3 d_2 - (1/2)(K_S b_{\pi 2}) d_2^2 \quad (4.18)$$

ενώ από τις σχέσεις των μετακινήσεων (4.7) και (4.8) προκύπτει:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ u_2 \\ \Phi_3 \\ u_3 \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} -M_2 \\ K_{\Phi A} \\ 0 \\ -M_3 \\ K_{\Phi B} \\ 1 \end{Bmatrix}^T \quad (4.19)$$

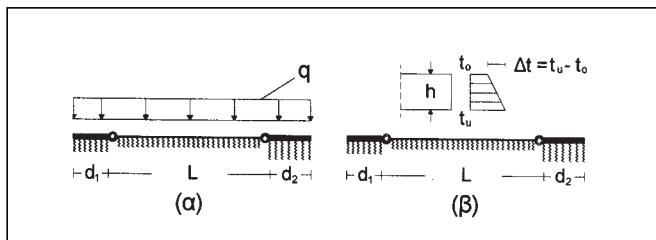
Ακολούθως γίνεται συνδυασμός των σχέσεων (4.14α) και (4.19), ο οποίος οδηγεί στον υπολογισμό των εντατικών μεγεθών στους κόμβους 2 και 3 του μεσαίου τμήματος του στοιχείου, λαμβάνοντας υπόψη την ύπαρξη των στροφικών ελατηρίων στους κόμβους αυτούς. Τα εντατικά αυτά μεγέθη προκύπτουν ως συνάρτηση των συντελεστών K_{ij} του μητρώου δυσκαμψίας του μεσαίου τμήματος χωρίς στροφικά ελατήρια στα άκρα του, το οποίο, όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω, είναι γνωστό. Με βάση τα παραπάνω προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$\left(1 + \frac{K_{11}}{K_{\Phi A}}\right) M_2 + \frac{K_{13}}{K_{\Phi B}} M_3 = K_{14} \quad (4.20)$$

$$V_2 = -\frac{K_{21}}{K_{\Phi A}} M_2 - \frac{K_{23}}{K_{\Phi B}} M_3 + K_{24} \quad (4.21)$$

$$\frac{K_{31}}{K_{\Phi A}} M_2 + \left(1 + \frac{K_{33}}{K_{\Phi B}}\right) M_3 = K_{34} \quad (4.22)$$

$$V_3 = -\frac{K_{41}}{K_{\Phi A}} M_2 - \frac{K_{43}}{K_{\Phi B}} M_3 + K_{44} \quad (4.23)$$



Σχήμα 6: (α) Ομοιόμορφη φόρτιση q.
 (β) Ανομοιόμορφη μεταβολή θερμοκρασίας Δt.
 Figure 6: (a) Uniform load q.
 (b) Nonuniform temperature variation Δt.

Με τη λύση του συστήματος των δύο εξισώσεων (4.20) και (4.22) υπολογίζονται οι ροπές M_2, M_3 :

$$M_2 = DM_2 / D \tag{4.24}$$

$$M_3 = DM_3 / D \tag{4.25}$$

όπου:

$$D_{M_2} = K_{14} \left(1 + \frac{K_{33}}{K_{\Phi B}}\right) - K_{34} \frac{K_{13}}{K_{\Phi B}} \tag{4.26}$$

$$D_{M_3} = K_{34} \left(1 + \frac{K_{11}}{K_{\Phi A}}\right) - K_{14} \frac{K_{31}}{K_{\Phi A}} \tag{4.27}$$

$$D = \left[1 + \frac{K_{11}}{K_{\Phi A}}\right] \left[1 + \frac{K_{33}}{K_{\Phi B}}\right] - \frac{(K_{13})^2}{K_{\Phi A} K_{\Phi B}} \tag{4.28}$$

Μετά τον υπολογισμό των ροπών M_2 και M_3 υπολογίζονται και οι τέμνουσες V_2 και V_3 με χρήση των σχέσεων (4.21) και (4.23) αντίστοιχα και με τη βοήθεια των (4.24) – (4.28):

$$V_2 = - \frac{K_{21}}{K_{\Phi A}} \frac{D_{M_2}}{D} - \frac{K_{23}}{K_{\Phi B}} \frac{D_{M_3}}{D} + K_{24} \tag{4.29}$$

$$V_3 = - \frac{K_{41}}{K_{\Phi A}} \frac{D_{M_2}}{D} - \frac{K_{43}}{K_{\Phi B}} \frac{D_{M_3}}{D} + K_{44} \tag{4.30}$$

Τέλος, ακολουθεί ο υπολογισμός των εντατικών μεγεθών M_1, M_4, V_1, V_4 συναρτήσει των M_2, M_3, V_2, V_3 με τη βοήθεια των σχέσεων (4.15) – (4.18) και (4.24) – (4.30). Παράλληλα, από τη μητρική σχέση (4.14β) προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ V_1 \\ M_4 \\ V_4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} K_{14}^o & K_{24}^o & K_{34}^o & K_{44}^o \end{bmatrix}^T \tag{4.31}$$

Με βάση τα παραπάνω προκύπτουν οι συντελεστές του μητρώου δυσκαμψίας του προτεινόμενου νέου στοιχείου, οι οποίοι δίνονται αναλυτικά στο Παράρτημα.

5. ΜΗΤΡΩΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ

Οι περιπτώσεις, για τις οποίες θα αναπτυχθούν τα μητρώα φόρτισης, είναι οι ακόλουθες:

- Ομοιόμορφο φορτίο q (σχήμα 6α).
- Ανομοιόμορφη μεταβολή της θερμοκρασίας Δt της άνω και κάτω ίνας της διατομής (σχήμα 6β).

Επειδή για τις παραπάνω περιπτώσεις φόρτισης στοιχείων δοκού Timoshenko εδραζομένων επί ελαστικού υποβάθρου τύπου Winkler με στροφικά ελατήρια στα άκρα δεν υφίστανται στη διεθνή βιβλιογραφία τα αντίστοιχα μητρώα φόρτισης, η ανάπτυξή τους θα παρουσιαστεί ακολούθως αναλυτικά. Σε δεύτερο στάδιο θα αναπτυχθούν τα αντίστοιχα μητρώα φόρτισης για τη δοκό Bernoulli, τα οποία θα προκύψουν από τα μητρώα δοκού Timoshenko με κατάλληλες τροποποιήσεις.

5.1. Ομοιόμορφο φορτίο q

5.1.1. Μεσαίο τμήμα του στοιχείου

5.1.1.1. Δοκός Timoshenko

Το μητρώο φόρτισης δοκού Timoshenko εδραζόμενης επί ελαστικού υποβάθρου Winkler υπολογίζεται από την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων [17]:

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} - \left(\frac{EI K_S b_\delta}{\Phi} \right) \frac{d^2 u}{dx^2} + (K_S b_\delta) u = q \tag{5.1}$$

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} - \left(\frac{EI K_S b_\delta}{\Phi} \right) \frac{d^2 u}{dx^2} + (K_S b_\delta) u = q \tag{5.2}$$

Όπως ήδη σημειώθηκε στο τέλος της παραγράφου 4.1., οι αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων αυτών (όπως και των ομογενών τους (4.2α), (4.2β)) εξαρτώνται από τις τιμές που μπορούν να λάβουν τα μεγέθη EI, K_S, b_δ και Φ. Έτσι π.χ. για πολύ μεγάλες τιμές του K_S αλλάζει το πρόσημο των διακρινοσών των χαρακτηριστικών εξισώσεων που προκύπτουν από τις παραπάνω διαφορικές εξισώσεις. Για συνδυασμούς τιμών των μεγεθών αυτών που συναντώνται συνήθως σε πρακτικές εφαρμογές οι λύσεις είναι:

$$u(x) = C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + C_4 f_4 + q / (K_S b_\delta) \tag{5.3}$$

$$\varphi(x) = C'_1 f_1 + C'_2 f_2 + C'_3 f_3 + C'_4 f_4 \tag{5.4}$$

όπου:

$$f_1 = e^{Rx} \cos(Qx), \quad f_2 = e^{Rx} \sin(Qx), \quad f_3 = e^{-Rx} \cos(Qx),$$

$$f_4 = e^{-Rx} \sin(Qx)$$

$$R = \sqrt{\sqrt{\frac{K_S b_\delta}{4EI} + \frac{K_S b_\delta}{4\Phi}}}, \quad Q = \sqrt{\sqrt{\frac{K_S b_\delta}{4EI} - \frac{K_S b_\delta}{4\Phi}}}$$

Λόγω της ύπαρξης των στροφικών ελατηρίων στα άκρα του μεσαίου τμήματος του στοιχείου και των απολύτως στερεών βραχιόνων εκατέρωθεν, οι συνοριακές συνθήκες είναι:

$$x = x_2 : \varphi_2 = M_2 / K_{\Phi A} u_2 = 0 \quad (5.5\alpha, \beta)$$

$$x = x_3 : \varphi_3 = M_3 / K_{\Phi B} u_3 = 0 \quad (5.6\alpha, \beta)$$

Οι ροπές κάμψης M_2, M_3 υπολογίζονται βάσει της γνωστής σχέσης της αντοχής υλικών:

$$M(x) = -EI(d\varphi/dx) \quad (5.7)$$

Από τις εξισώσεις (5.3) και (5.4) καθίσταται σαφές ότι για την ανάπτυξη του μητρώου φόρτισης απαιτείται ο προσδιορισμός 8 σταθερών ολοκλήρωσης (των $C_1' - C_4'$ και των $C_1 - C_4$). Προς τούτο χρησιμοποιούνται αφ' ενός οι 4 συνοριακές συνθήκες και αφ' ετέρου η σχέση μεταξύ των μεγεθών φ και u , η οποία οδηγεί σε εκφράσεις των $C_1' - C_4'$ συναρτήσει των $C_1 - C_4$. Η σχέση αυτή είναι [17]:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{K_S b_\delta}{\Phi} u = \frac{d\varphi}{dx} \quad (5.8)$$

Με βάση την (5.8) και τις (5.3), (5.4), προκύπτουν δύο συστήματα εξισώσεων με αγνώστους τις σταθερές $C_1' - C_4'$. Η επίλυση των δύο αυτών συστημάτων εξισώσεων δίνει:

$$C_1' = \omega_1 C_1 + \omega_2 C_2 \quad (5.9)$$

$$C_2' = -\omega_2 C_1 + \omega_1 C_2 \quad (5.10)$$

$$C_3' = -\omega_1 C_3 + \omega_2 C_4 \quad (5.11)$$

$$C_4' = -\omega_1 C_3 + \omega_2 C_4 \quad (5.12)$$

όπου:

$$\omega_1 = \frac{RA_1 + QA_2}{R^2 + Q^2} \quad \omega_2 = \frac{-QA_1 + RA_2}{R^2 + Q^2}$$

$$A_1 = (R^2 - Q^2) - \frac{K_S b_\delta}{\Phi} \quad A_2 = 2RQ$$

Με βάση τις 4 συνοριακές συνθήκες (5.5α,β) και (5.6α,β), τις εκφράσεις των μεγεθών μετακίνησης (5.3) και (5.4), και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (5.9) - (5.12) προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα τεσσάρων εξισώσεων, από το οποίο υπολογίζονται οι σταθερές $C_1 - C_4$. Το σύστημα αυτό έχει τη μορφή:

$$\mathbf{FQ} * \mathbf{CQ} = \mathbf{VQ} \quad (5.13)$$

όπου \mathbf{FQ} είναι το διαστάσεων 4x4 μητρώο των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος, το \mathbf{CQ} είναι το διάνυσμα 4x1 των αγνώστων $C_1 - C_4$ και το \mathbf{VQ} είναι το διάνυσμα 4x1 των σταθερών όρων του συστήματος.

Τέλος, από τις σχέσεις (5.4) και (5.7), και έχοντας προηγουμένως υπολογίσει τις σταθερές $C_1 - C_4$ (και επομένως και τις σταθερές $C_1' - C_4'$ από τις σχέσεις (5.9) - (5.12)) καταλήγει κανείς στον υπολογισμό των ροπών κάμψης στα άκρα του στοιχείου:

$$M_2 = -\frac{4EIq}{(K_S b_\delta) D_Q} (\omega_1^2 + \omega_2^2) [Rn - Qm] \left[\frac{EI}{K_{\Phi B}} (\omega_2 R + \omega_1 Q) [n' - m'] + [\omega_1 n - \omega_2 m] \right] \quad (5.14)$$

όπου:

$$n = \sin(QL), n' = \cos(QL), m = \sinh(RL), m' = \cosh(RL).$$

Η τιμή της ροπής M_3 δίνεται από την εξίσωση (5.14) με εναλλαγή, όμως, του $K_{\Phi B}$ με το $K_{\Phi A}$ και αντιστρόφως.

Οι τέμνουσες δυνάμεις προκύπτουν με την ίδια διαδικασία, με βάση τη γνωστή σχέση:

$$V(x) = -EI(d^2\varphi/dx^2) \quad (5.15)$$

Με ανάλογους υπολογισμούς καταλήγει κανείς στη σχέση:

$$V_2 = \frac{4EIq}{(K_S b_\delta) D_Q} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \left[-\frac{(EI)^2}{K_{\Phi A} K_{\Phi B}} F_1 - \frac{EI}{K_{\Phi A}} F_2 + \frac{EI}{K_{\Phi B}} F_3 - F_4 \right] \quad (5.16)$$

όπου:

$$F_1 = (R^2 + Q^2)(\omega_2 R + \omega_1 Q)(n' - m')(Rn + Qm) \quad (5.17)$$

$$F_2 = (R^2 - Q^2)(\omega_1 n - \omega_2 m)(Qm - Rn) + 2RQ(n' - m')(\omega_1 Qn' - \omega_2 Rm') \quad (5.18)$$

$$F_3 = 2RQ [(\omega_1 n - \omega_2 m)(Rm + Qn) + (\omega_1 Qm' - \omega_2 Rn')(n' - m')] \quad (5.19)$$

$$F_4 = 2RQ(n' - m')(\omega_1 n - \omega_2 m) \quad (5.20)$$

Η τιμή της τέμνουσας V_3 προκύπτει από την τιμή της V_2 με αμοιβαία εναλλαγή του $K_{\Phi B}$ με το $K_{\Phi A}$ και αντιστρόφως. Τέλος, το D_Q δίνεται από τη σχέση:

$$D_Q = \frac{(2EI)^2}{K_{\Phi A} K_{\Phi B}} (\omega_2 R + \omega_1 Q)^2 (m^2 + n^2) + 4EI \left[\frac{1}{K_{\Phi A}} + \frac{1}{K_{\Phi B}} \right] (\omega_2 R + \omega_1 Q)(\omega_2 m m' - \omega_1 n n') + 4(\omega_2^2 m^2 - \omega_1^2 n^2)$$

5.1.1.2. Δοκός Bernouli

Το μητρώο φόρτισης για τη δοκό Bernouli προκύπτει ως υποπερίπτωση του μητρώου της δοκού Timoshenko με το ακόλουθο σκεπτικό: Η διαφορά μεταξύ της θεωρίας Bernouli και της θεωρίας Timoshenko έγκειται στο ότι η πρώτη βασίζεται στην παραδοχή ότι οι διατμητικές παραμορφώσεις των δοκών είναι αμελητέες και δεν επηρεάζουν τη μηχανική

συμπεριφορά τους. Η παραδοχή αυτή δεν οδηγεί σε αξιόλογες αποκλίσεις από την πραγματικότητα, εφόσον το ύψος της διατομής της δοκού δεν υπερβαίνει το 1/4 του μήκους της. Σε επίπεδο μαθηματικής διατύπωσης των εξισώσεων που εκφράζουν τις δύο θεωρίες, η διαφορά αυτή μεταφράζεται στο ότι για τις δοκούς Timoshenko η δυσστημσία GF' έχει πεπερασμένη τιμή, ενώ για τις δοκούς Bernoulli τείνει στο άπειρο. Με βάση αυτήν την παρατήρηση μπορεί να παραχθεί το μητρώο φόρτισης της δοκού Bernoulli από τις εξισώσεις της δοκού Timoshenko. Οι ζητούμενες σχέσεις προκύπτουν ως οριακές περιπτώσεις για $GF' \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\Phi \rightarrow \infty} (R) = \lim_{\Phi \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{K_S b_\delta}{4EI} + \frac{K_S b_\delta}{4\Phi}} \right] = \sqrt[4]{\frac{K_S b_\delta}{4EI}} \quad (5.21)$$

$$\lim_{\Phi \rightarrow \infty} (Q) = \lim_{\Phi \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{K_S b_\delta}{4EI} - \frac{K_S b_\delta}{4\Phi}} \right] = \sqrt[4]{\frac{K_S b_\delta}{4EI}} \quad (5.22)$$

Συνεπώς, είναι δυνατόν να αντικατασταθούν οι δύο παράμετροι R, Q από τη νέα παράμετρο $\bar{R} = \sqrt[4]{\frac{K_S b_\delta}{4EI}}$.

Με βάση τα παραπάνω προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 2\bar{R}^2, \quad \omega_1 = \omega_2 = \bar{R}$$

Επομένως, από τη σχέση (5.14) υπολογίζεται:

$$M_2 = -\frac{2EIq\bar{R}^2}{(K_S b_\delta)D_Q} [n-m] \left[\frac{2EI\bar{R}}{K_{\Phi B}} [n'-m'] + [n-m] \right] \quad (5.23)$$

Η τιμή της ροπής M_3 προκύπτει από την τιμή της M_2 με εναλλαγή του $K_{\Phi B}$ με το $K_{\Phi A}$ και αντίστροφα. Τέλος, οι (5.16) – (5.20) δίνουν:

$$V_2 = \frac{2EIq\bar{R}^3}{(K_S b_\delta)D_Q} \left[\frac{(EI)^2}{K_{\Phi A} K_{\Phi B}} F_1 - \frac{EI}{K_{\Phi A}} F_2 + \frac{EI}{K_{\Phi B}} F_3 - F_4 \right] \quad (5.24)$$

όπου:

$$F_1 = 4\bar{R}^2 (n' - m')(n + m) \quad (5.25)$$

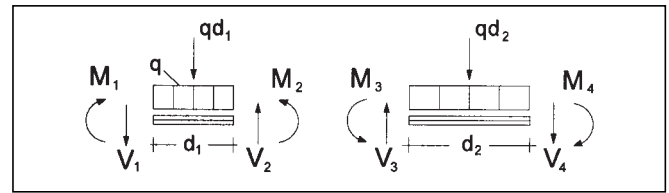
$$F_2 = 2\bar{R} (n' - m')^2 \quad (5.26)$$

$$F_3 = 2\bar{R} [(n^2 - m^2) - (m' - n')^2] \quad (5.27)$$

$$F_4 = 2(n' - m')(n - m) \quad (5.28)$$

Η έκφραση της τέμνουσας V_3 προκύπτει από την έκφραση της V_2 με αμοιβαία εναλλαγή του $K_{\Phi B}$ με το $K_{\Phi A}$ και αντίστροφα. Το D_Q δίνεται από τη σχέση:

$$D_Q = \frac{4(EI)^2 \bar{R}^2}{K_{\Phi A} K_{\Phi B}} (m^2 + n^2) + 2EI\bar{R} \left[\frac{1}{K_{\Phi A}} + \frac{1}{K_{\Phi B}} \right] (m m' - n n') + (m^2 - n^2)$$



Σχήμα 7: Συνθήκες ισορροπίας των απολύτως στερεών βραχιόνων.
Figure 7: Equilibrium of rigid offsets.

5.1.2. Μεταβίβαση των μεγεθών στα άκρα του στοιχείου

Τα απολύτως στερεά τμήματα φορτίζονται και αυτά με ομοιόμορφο φορτίο q. Με βάση λοιπόν τις συνθήκες ισορροπίας των τμημάτων αυτών (σχήμα 7) προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις :

$$M_1 = M_2 + V_2 d_1 - \frac{1}{2} q d_1^2 \quad (5.29)$$

$$V_1 = V_2 - q d_1 \quad (5.30)$$

$$M_4 = M_3 - V_3 d_2 + \frac{1}{2} q d_2^2 \quad (5.31)$$

$$V_4 = V_3 - q d_2 \quad (5.32)$$

5.2. Ανομοιόμορφη μεταβολή θερμοκρασίας Δt

5.2.1. Μεσαίο τμήμα

5.2.1.1. Δοκός Timoshenko

Στην περίπτωση που η δοκός υπόκειται σε ανομοιόμορφη μεταβολή θερμοκρασίας Δt, ισχύουν οι εξισώσεις (4.2α) και (4.2β). Επειδή όμως η ανομοιόμορφη μεταβολή θερμοκρασίας Δt είναι καταναγκασμός, η σχέση, που δίνει τις καμπτικές ροπές, είναι:

$$M(x) = -EI \left(\frac{d\phi}{dx} + \frac{\alpha \Delta t}{h} \right) \quad (5.33)$$

Οι αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων (4.2α), (4.2β) δίνονται από τις εξισώσεις (5.3), (5.4), με την επισήμανση ότι στην (5.3) θα πρέπει να τεθεί q=0. Με την ίδια διαδικασία, όπως και προηγουμένως, προκύπτει η σχέση:

$$M_2 = \frac{(EI)^2 \alpha \Delta t}{h D_{\Delta t}} (\omega_2 R + \omega_1 Q) \left[\frac{2EI}{K_{\Phi A} K_{\Phi B}} (\omega_2 R + \omega_1 Q) [(n'^2 - n^2) - (m^2 + m'^2)] + 4\omega_1 n \left(\frac{n'}{K_{\Phi A}} + \frac{m'}{K_{\Phi B}} \right) - 4\omega_2 m \left(\frac{n'}{K_{\Phi B}} + \frac{m'}{K_{\Phi A}} \right) \right] + \frac{EI \alpha \Delta t}{h}$$

Η τιμή της ροπής M_3 υπολογίζεται από την τιμή της M_2 με εναλλαγή του $K_{\Phi B}$ με το $K_{\Phi A}$ και αντιστρόφως. Για τις τέμνουσες δυνάμεις ισχύουν:

$$V_2 = -\frac{4(EI)^2 \alpha \Delta t}{h D_{\Delta t}} \left[\frac{EI}{K_{\Phi A} K_{\Phi B}} (\omega_2 R + \omega_1 Q) (n' - m') F_1 + F_2 \right]$$

όπου:

$$F_1 = (R^2 - Q^2)(\omega_1 n + \omega_2 m) + 2RQ(\omega_1 m - \omega_2 n)$$

$$F_2 = \frac{1}{K_{\Phi A}} (R^2 - Q^2)(\omega_1^2 n^2 - \omega_2^2 m^2) - 2RQ[\omega_2 n(\frac{\omega_1}{K_{\Phi A}} n - \frac{\omega_2}{K_{\Phi B}} m) + \omega_1 m(\frac{\omega_2}{K_{\Phi A}} m - \frac{\omega_1}{K_{\Phi B}} n)]$$

Η τιμή της τέμνουσας V_3 προκύπτει από την τιμή της V_2 με αμοιβαία εναλλαγή του $K_{\Phi B}$ με το $K_{\Phi A}$ και αντιστρόφως. Τέλος, σημειώνεται ότι $D_{\Delta t} = D_Q$.

5.2.1.2. Δοκός Bernouli

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (5.21), (5.22) και τις ισότητες $A_1 = 0$, $A_2 = 2\bar{R}^2$, $\omega_1 = \omega_2 = \bar{R}$, και τηρώντας τη διαδικασία που ακολουθήθηκε προηγουμένως, συνάγεται:

$$M_2 = \frac{2(EI)^2 \bar{R} \alpha \Delta t}{h D_{\Delta t}} \left[\frac{EI \bar{R}}{K_{\Phi A} K_{\Phi B}} [(n'^2 - n^2) - (m^2 + m'^2)] + n \left(\frac{n'}{K_{\Phi A}} + \frac{m'}{K_{\Phi B}} \right) - m \left(\frac{n'}{K_{\Phi B}} + \frac{m'}{K_{\Phi A}} \right) \right] + \frac{EI \alpha \Delta t}{h}$$

Η τιμή της ροπής M_3 προκύπτει από την τιμή της M_2 με εναλλαγή του $K_{\Phi B}$ με το $K_{\Phi A}$ και αντιστρόφως:

$$V_2 = - \frac{2(EI)^2 \bar{R}^2 \alpha \Delta t}{h D_{\Delta t}} \left[\frac{2EI \bar{R}}{K_{\Phi A} K_{\Phi B}} (n' - m') (m - n) - \frac{1}{K_{\Phi A}} (n^2 + m^2) + \frac{1}{K_{\Phi B}} mn \right]$$

Η τιμή της τέμνουσας V_3 προκύπτει από την τιμή της V_2 με αμοιβαία εναλλαγή του $K_{\Phi B}$ με το $K_{\Phi A}$ και αντιστρόφως. Τέλος, σημειώνεται ότι $D_{\Delta t} = D_Q$.

5.2.3. Μεταβίβαση των μεγεθών στα άκρα του στοιχείου

Ισχύουν οι σχέσεις (5.29) – (5.32), με τη διαφορά ότι πρέπει σε αυτές να τεθεί $q=0$.

6. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Προκειμένου να καταστεί σαφής η χρησιμότητα τόσο των αναπτυχθέντων μητρώων δυσκαμψίας όσο και των μητρώων φόρτισης, παρατίθενται ακολούθως αποτελέσματα και συγκρίσεις από την επίλυση ενός πλαισίου οπλισμένου σκυροδέματος και ενός μεταλλικού πλαισίου. Για την επίλυση των πλαισίων αυτών με χρήση του προτεινόμενου νέου πεπερασμένου στοιχείου συντάχθηκε πρόγραμμα σε γλώσσα QBASIC. Για τη σύγκριση των αποτελεσμάτων βάσει του νέου στοιχείου με αποτελέσματα από χρήση συμβατικών στοιχείων, τα ίδια πλαίσια επιλύθηκαν για μια σειρά διαφορετικών διακριτοποιήσεων με τη βοήθεια του γνωστού προγράμματος SAP90 [28].

6.1. Παράδειγμα 1

Στο παράδειγμα αυτό επιλύεται το πλαίσιο οπλισμένου σκυροδέματος του σχήματος 8 με χρήση του προτεινόμενου νέου πεπερασμένου στοιχείου χωρίς την ύπαρξη των ημιάκαμπτων συνδέσεων. Στόχος του παραδείγματος είναι να καταδείξει την υπεροχή του προτεινόμενου (αναλυτικής ακριβούς) στοιχείου όσον αφορά στην προσομοίωση του φορέα θεμελίωσης έναντι των συμβατικών προσομοιώσεων του φορέα θεμελίωσης με περισσότερα απλά στοιχεία δοκών, στους κόμβους των οποίων τοποθετούνται μεμονωμένα κατακόρυφα ελατήρια που υποκαθιστούν το συνεχές ελαστικό υπόβαθρο.

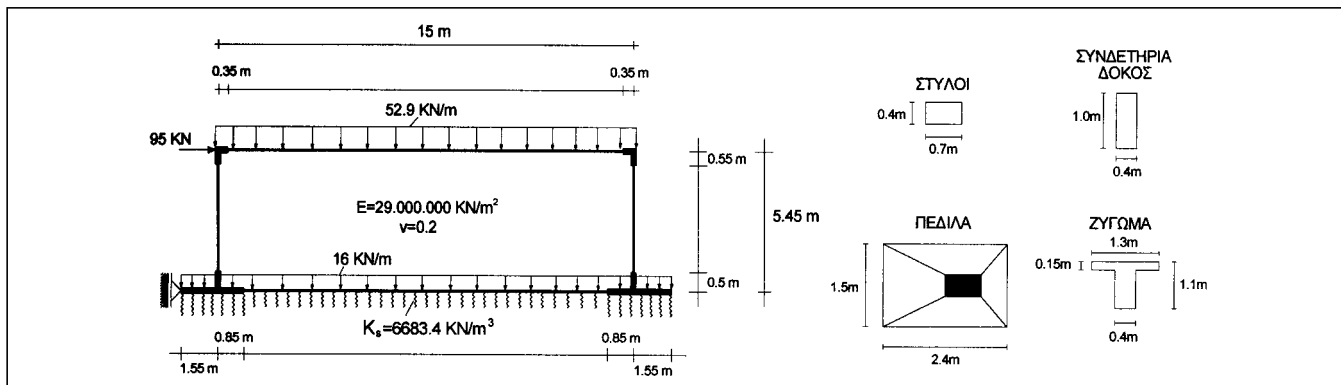
Για το σκοπό αυτό επιλύθηκαν με το πρόγραμμα SAP90 τέσσερα διαφορετικά συμβατικά μοντέλα του φορέα θεμελίωσης που διαφέρουν μεταξύ τους ως προς την πυκνότητα διακριτοποίησης της συνδετήριας δοκού. Τα αποτελέσματα των μοντέλων αυτών συγκρίθηκαν με τα αποτελέσματα που έδωσε η επίλυση με το νέο στοιχείο.

6.1.1. Συγκρίσεις μεγεθών μετακίνησης

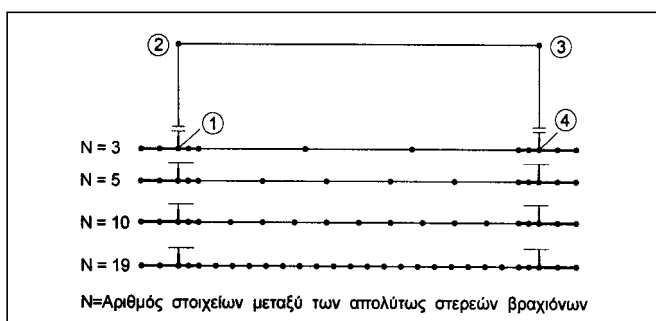
Στο σχήμα 10 δίνονται οι αποκλίσεις των μεγεθών μετακίνησης των κόμβων 1 έως 4 (σχήμα 9) των τεσσάρων μοντέλων από τα αντίστοιχα μεγέθη που έδωσε η επίλυση με το νέο στοιχείο. Από το σχήμα αυτό προκύπτει το συμπέρασμα ότι η προσομοίωση με 3 στοιχεία αποτυγχάνει να προσεγγίσει ικανοποιητικά τις στροφές των κόμβων 3 και 4 (ακραίοι κόμβοι της συνδετήριας δοκού) και ότι, για να επιτευχθεί ικανοποιητική ακρίβεια στην προσέγγιση όλων των μεγεθών μετακίνησης, απαιτείται η διακριτοποίηση της συνδετήριας δοκού με τουλάχιστον 5 στοιχεία.

6.1.2. Συγκρίσεις μεγεθών έντασης

Στο σχήμα 11 και στο σχήμα 12 παρουσιάζονται οι αποκλίσεις των ροπών και των τεμνουσών αντίστοιχα στους κόμβους 1 και 4. Η επιλογή των κόμβων αυτών έγινε, όχι μόνο διότι οι κόμβοι αυτοί είναι κόμβοι του φορέα θεμελίωσης, αλλά και διότι στους κόμβους αυτούς εμφανίστηκαν οι μεγαλύτερες αποκλίσεις των τεσσάρων μοντέλων από την επίλυση με το νέο στοιχείο. Από το σχήμα 11 εύκολα συνάγεται το συμπέρασμα ότι το μοντέλο με τα 3 στοιχεία είναι ανεπαρκές, διότι εμφανίζει αποκλίσεις, οι οποίες στις βάσεις των στύλων πλησιάζουν το 30%. Οι αποκλίσεις του μοντέλου αυτού είναι ακόμα μεγαλύτερες φθάνοντας στο 40% όσον αφορά στις ροπές που αναπτύσσονται στα άκρα της δοκού θεμελίωσης. Το μοντέλο με τα 5 στοιχεία, όπως είναι φυσικό, εμφανίζει ακριβέστερα αποτελέσματα, με αποκλίσεις που κυμαίνονται από 10 έως 15%. Τέλος, τα δύο επόμενα μοντέλα (με 10 και 19 στοιχεία αντίστοιχα) προσεγγίζουν πολύ ικανοποιητικά την ακριβή λύση, με αντίτιμο όμως την πυκνή διακριτοποίηση. Η παραπάνω εικόνα διατηρείται και



Σχήμα 8: Πλαίσιο οπλισμένου σκυροδέματος (Παράδειγμα 1).
Figure 8: R/C frame (Example 1).



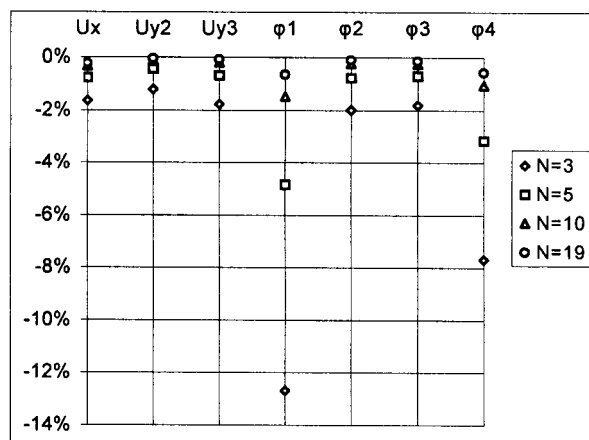
Σχήμα 9: Τέσσερα μοντέλα με διαφορετικές διακριτοποιήσεις της θεμελιοδοκού.
Figure 9: Four models with varying discretization density of the foundation beam.

στις αποκλίσεις των τεμνουσών. Στο σχήμα 12 φαίνεται καθαρά ότι οι αποκλίσεις του μοντέλου με τα τρία στοιχεία, αν και είναι μικρότερες σε σύγκριση με τις αντίστοιχες αποκλίσεις των ροπών στις βάσεις των δύο στύλων του πλαισίου (περίπου 15% για τον αριστερό και 5% για το δεξιό στύλο), γίνονται υπερβολικά μεγάλες στα άκρα της δοκού θεμελίωσης, εγγιζοντας ποσοστά της τάξης του 80-90%.

6.2. Παράδειγμα 2

Στο παράδειγμα αυτό επιλύεται το μεταλλικό πλαίσιο του σχήματος 13 με φορέα θεμελίωσης από οπλισμένο σκυρόδεμα. Γίνεται χρήση δύο υποπερίπτωσης του προτεινόμενου νέου στοιχείου: Η μία αφορά στην υποπερίπτωση στοιχείου με ημιάκαμπτες συνδέσεις χωρίς συνεχή ελαστική έδραση (προσομοίωση του ζυγώματος του πλαισίου), ενώ η δεύτερη αφορά στην υποπερίπτωση στοιχείου με συνεχή ελαστική έδραση χωρίς τις ημιάκαμπτες συνδέσεις (προσομοίωση της συνδετήριας δοκού θεμελίωσης). Στόχος του παραδείγματος είναι να δείξει την υπεροχή του προτεινόμενου στοιχείου όσον αφορά στην αξιόπιστη προσομοίωση ημιάκαμπτων συνδέσεων έναντι συμβατικών τρόπων προσομοίωσής τους.

Προς τούτο, για τη θεμελιοδοκό του πλαισίου χρησιμοποιήθηκε μια πυκνή διακριτοποίηση (N=19, βλ. σχήμα 9)



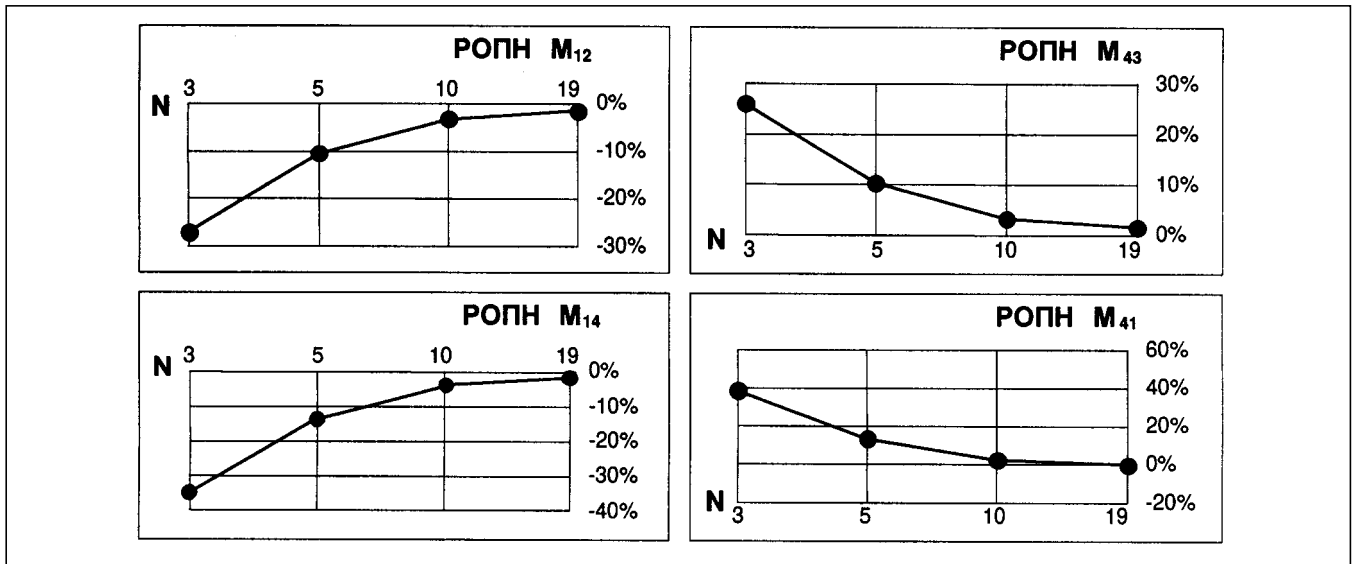
Σχήμα 10: Αποκλίσεις των μετακινήσεων των κόμβων 1 – 4 των τεσσάρων μοντέλων από τη λύση αναφοράς με χρήση του νέου στοιχείου.
Figure 10: Deviations of the displacements at nodes 1 – 4 of the four models relative to the reference solution using the proposed new element.

έτσι, ώστε η προσέγγιση της συνεχούς ελαστικής έδρασης να προσεγγίζει επαρκώς την ακριβή λύση και οι όποιες διαφορές στα αποτελέσματα μεταξύ της επίλυσης με το προτεινόμενο στοιχείο και των επίλυσεων με το SAP90 να οφείλονται αποκλειστικά στο διαφορετικό τρόπο προσομοίωσης των ημιάκαμπτων συνδέσεων.

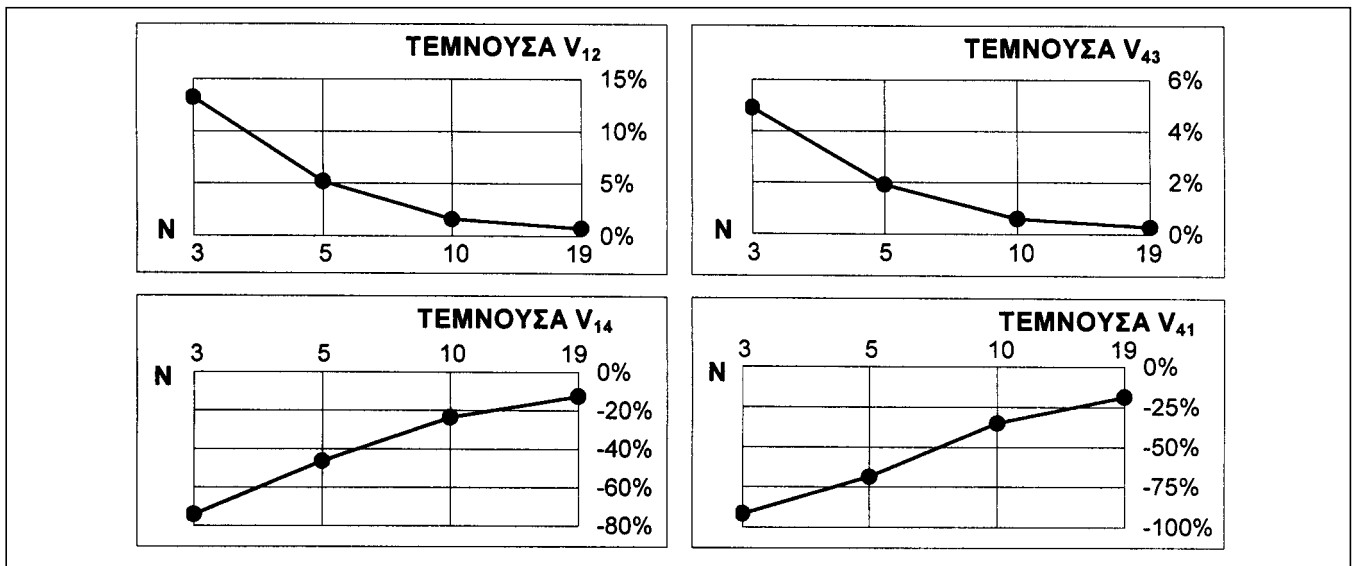
6.2.1. Η προσομοίωση των ημιάκαμπτων συνδέσεων

Πραγματοποιήθηκαν επιλύσεις με τρεις διαφορετικές πεπερασμένες τιμές δυστρεψιάς για τα στροφικά ελατήρια (πίνακας 1). Οι τιμές αυτές αντιστοιχούν σε τρεις διαφορετικούς τρόπους σύνδεσης μεταλλικών στοιχείων [22], όπως φαίνεται στο σχήμα 14.

Η μοντελοποίηση των στροφικών ελατηρίων με χρήση συμβατικών προγραμμάτων, που διαθέτουν μόνον απλά κλασικά στοιχεία δοκού, απαιτεί μια εξειδικευμένη προσομοίωση του σημείου σύνδεσης των δύο δοκών. Στο σχήμα 15 δίνονται οι δύο τρόποι που χρησιμοποιήθηκαν κατά τις επι-



Σχήμα 11: Ποσοστιαίες αποκλίσεις των ροπών των τεσσάρων μοντέλων από τη λύση αναφοράς με το προτεινόμενο νέο στοιχείο.
 Figure 11: Bending moment deviation (in percent) of the four models relative to the reference solution using the proposed new element.



Σχήμα 12: Ποσοστιαίες αποκλίσεις των τεμνουσών των τεσσάρων μοντέλων από τη λύση αναφοράς με το νέο προτεινόμενο στοιχείο.
 Figure 12: Shear force deviations (in percent) of the four models relative to the reference solution using the proposed new element.

λύσεις με το πρόγραμμα SAP90. Είναι προφανές ότι τέτοιες τεχνικές προσομοίωσης καθίστανται περιττές, εφόσον το χρησιμοποιούμενο πρόγραμμα διαθέτει το προτεινόμενο νέο στοιχείο.

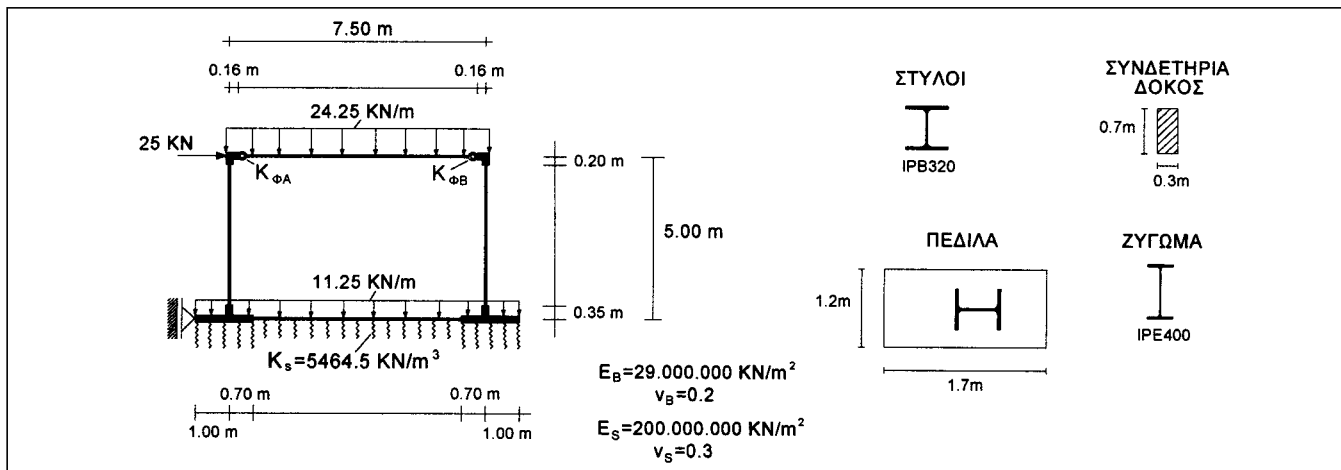
6.2.2. Συγκρίσεις μεγεθών μετακίνησης

Οι συγκρίσεις περιορίζονται στις τιμές των στροφών στους κόμβους όπου βρίσκονται τα στροφικά ελατήρια, αφού στους κόμβους αυτούς εμφανίζονται οι μεγαλύτερες αποκλίσεις. Από το σχήμα 16 εξάγεται το συμπέρασμα ότι οι αποκλίσεις είναι γενικά μικρές και ότι αυξάνουν, όταν αυξάνει η τιμή της σταθεράς των στροφικών ελατηρίων. Αυτό σημαίνει

ότι οι συμβατικοί τρόποι προσομοίωσης των ελατηρίων που περιγράφονται στο σχήμα 15 είναι επαρκείς όσον αφορά στις τιμές των μεγεθών μετακίνησης.

6.2.3. Συγκρίσεις μεγεθών έντασης

Στο σχήμα 17 δίνονται οι αποκλίσεις των μοντέλων από τις τιμές που δίνει η επίλυση με το προτεινόμενο στοιχείο, όσον αφορά στις καμπτικές ροπές που αναπτύσσονται στους κόμβους όπου βρίσκονται τα στροφικά ελατήρια. Όπως φαίνεται στο σχήμα αυτό, οι αποκλίσεις είναι ιδιαίτερα μικρές και μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες. Ακόμη μικρότερες εμφανίζονται οι αποκλίσεις που αφορούν στις τέμνουσες



Σχήμα 13: Μεταλλικό πλαίσιο (Παράδειγμα 2).
Figure 13: Steel frame (Example 2).

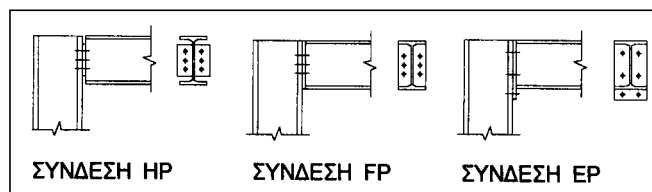
Πίνακας 1: Οι τιμές δυστρεφιάς των στροφικών ελατηρίων που χρησιμοποιήθηκαν στις αναλύσεις.
Table 1: Torsional stiffnesses of the rotational springs used in the analyses.

Τύπος σύνδεσης	K_{ϕ} (kNm/rad)
HP	2081
FP	4510
EP	48226

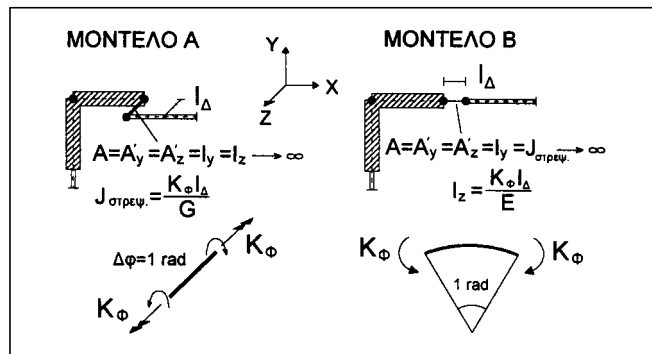
δυνάμεις (σχήμα 18). Το γεγονός ότι τα αποτελέσματα, τα οποία εξάγονται με τη βοήθεια της συμβατικής προσομοίωσης των ημιάκαμπτων συνδέσεων, είναι πολύ κοντά στα αποτελέσματα των επίλυσεων με χρήση του νέου στοιχείου δεν αναιρεί τη χρησιμότητα του τελευταίου, το οποίο, πέραν της ακρίβειας που εξασφαλίζει, διακρίνεται για την απλότητα και την οικονομία με την οποία επιτυγχάνεται η προσομοίωση αυτή. Δεν πρέπει να διαφεύγει της προσοχής το γεγονός ότι για την προσομοίωση του πλαισίου του παραδείγματος 2 χρειάστηκαν μόνον 4 νέου τύπου στοιχεία έναντι των συνολικώς 34 συμβατικών που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυσή του με το SAP90. Πέραν τούτου, δεν πρέπει να λησμονείται ότι για την ακριβή προσέγγιση της τιμής της σταθεράς των στροφικών ελατηρίων με τις τεχνικές προσομοίωσης, που περιγράφηκαν πιο πάνω, απαιτείται πολύ μεγάλη προσοχή στην επιλογή τόσο του μήκους όσο και των γεωμετρικών στοιχείων της διατομής των πρόσθετων βοηθητικών στοιχείων που χρησιμοποιούνται.

7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Παρουσιάστηκε η διαδικασία ανάπτυξης του μητρώου δυσκαμψίας και των μητρώων φόρτισης ενός νέου σύνθετου πεπερασμένου στοιχείου δοκού, το οποίο ενσωματώνει τη δυνατότητα ακριβούς προσομοίωσης τόσο δοκών επί ελα-

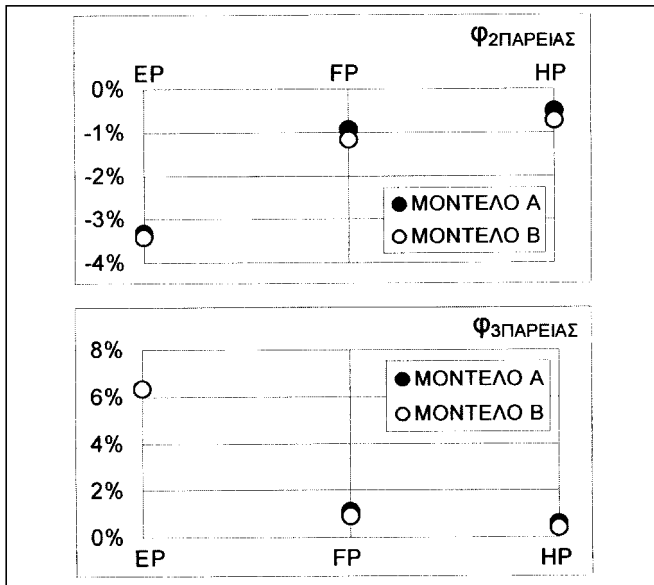


Σχήμα 14: Τρεις τύποι σύνδεσης μεταλλικών στοιχείων.
Figure 14: Three types of steel frame connections.

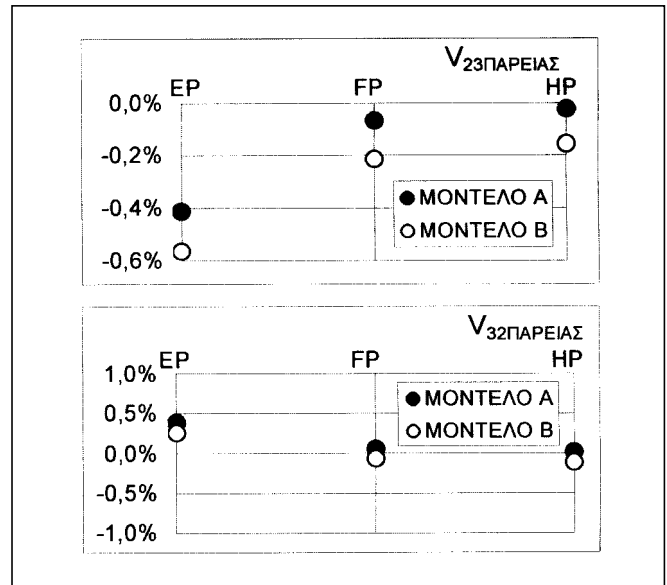


Σχήμα 15: Δύο διαφορετικοί τρόποι προσομοίωσης των ημιάκαμπτων συνδέσεων με πρόσθετα βοηθητικά στοιχεία.
Figure 15: Two different ways of modelling the semi-rigid connections using additional auxiliary elements.

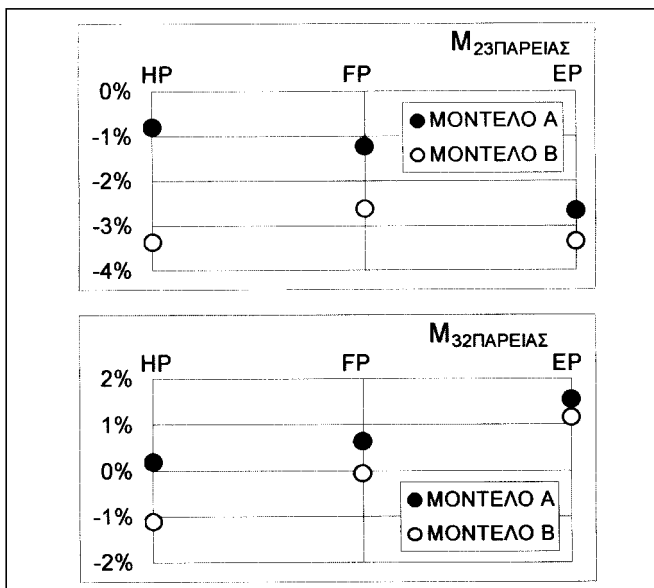
στικού υποβάθρου όσο και ημιάκαμπτων συνδέσεων μεταλλικών φορέων. Η υπεροχή του νέου στοιχείου έναντι των κλασικών στοιχείων, που χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση των φορέων θεμελίωσης, έγκειται στο γεγονός ότι βασίζεται στην αναλυτική επίλυση της διαφορικής εξίσωσης που διέπει το πρόβλημα της μηχανικής συμπεριφοράς δοκών επί ελαστικού υποβάθρου τύπου Winkler. Ταυτόχρονα, η ενσωμάτωση των απολύτως στερεών βραχιόνων στα άκρα του στοιχείου επιτρέπει την άμεση προσομοίωση αφ' ενός των πεδύλων θεμελίωσης, τα οποία ως δομικά στοιχεία μεγάλου όγκου θεωρούνται κατά την ανάλυση ως άκαμπτα, και



Σχήμα 16: Οι αποκλίσεις των στροφών των κόμβων 2 και 3 από την επίλυση με το προτεινόμενο νέο στοιχείο.
 Figure 16: Deviations of the rotations at nodes 2 and 3 from the solution using the proposed new element.



Σχήμα 18: Οι αποκλίσεις των τεμνουσών δυνάμεων παρειάς των κόμβων 2 και 3 από τη λύση με το προτεινόμενο νέο στοιχείο.
 Figure 18: Deviations of shear forces at nodes 2 and 3 from the solution with the proposed new element.



Σχήμα 17: Οι αποκλίσεις των ροπών παρειάς των κόμβων 2 και 3 από τη λύση με το προτεινόμενο νέο στοιχείο.
 Figure 17: Deviations of bending moments at nodes 2 and 3 from the solution using the proposed new element.

αφ' ετέρου των άκαμπτων περιοχών των κόμβων (δοκών, στύλων και κυρίως τοιχωμάτων). Η ενσωμάτωση των στροφικών ελατηρίων, σε συνδυασμό με τους απολύτως στερεούς βραχίονες, οδηγεί σε μια υπολογιστικά απλούστερη προσομοίωση των ημιάκαμπτων συνδέσεων στους κόμβους μεταλλικών πλαισίων κάνοντας περιττή τη χρήση πρόσθετων βοηθητικών στοιχείων. Τα παραδείγματα που παρατέθηκαν τεκ-

μηρίωσαν τη χρησιμότητά του στοιχείου, η οποία συνίσταται αφ' ενός στην ακρίβεια του, η οποία μόνο με χρήση ενός μεγάλου αριθμού συμβατικών στοιχείων δοκού μπορεί να προσεγγιστεί, και αφ' ετέρου στην ευκολία με την οποία προσομοιώνονται τμήματα φορέων, που με χρήση συμβατικών στοιχείων δοκού θα απαιτούσαν ειδικές τεχνικές προσομοίωσης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Συντελεστές του μητρώου δυσκαμψίας του προτεινόμενου νέου στοιχείου:

$$K_{11}^0 = (1 - d_1 \frac{K_{21}}{K_{\Phi A}}) \frac{D_{M2}}{D} - d_1 \frac{K_{23}}{K_{\Phi B}} \frac{D_{M3}}{D} + d_1^2 K_{22} + d_1 K_{21} + \frac{1}{3} (K_S b_{\pi 1}) d_1^3$$

$$D_{M2} = (1 + \frac{K_{33}}{K_{\Phi B}}) (K_{11} + d_1 K_{12}) - \frac{K_{13}}{K_{\Phi B}} (K_{31} + d_1 K_{32})$$

$$D_{M3} = (1 + \frac{K_{11}}{K_{\Phi A}}) (K_{31} + d_1 K_{32}) - \frac{K_{31}}{K_{\Phi A}} (K_{11} + d_1 K_{12})$$

$$K_{12}^0 = (1 - d_1 \frac{K_{21}}{K_{\Phi A}}) \frac{D_{M2}}{D} - d_1 \frac{K_{23}}{K_{\Phi B}} \frac{D_{M3}}{D} + d_1 K_{22} + \frac{1}{2} (K_S b_{\pi 1}) d_1^2$$

$$K_{22}^0 = - \frac{K_{21}}{K_{\Phi A}} \frac{D_{M2}}{D} - \frac{K_{23}}{K_{\Phi B}} \frac{D_{M3}}{D} + K_{22} + (K_S b_{\pi 1}) d_1$$

$$D_{M3} = (1 + \frac{K_{11}}{K_{\Phi A}}) K_{32} - \frac{K_{31}}{K_{\Phi A}} K_{12}$$

$$D_{M2} = (1 + \frac{K_{33}}{K_{\Phi B}}) K_{12} - \frac{K_{13}}{K_{\Phi B}} K_{32}$$

$$K_{13}^O = (1 - d_1 \frac{K_{21}}{K_{\Phi A}}) \frac{D_{M2}}{D} - d_1 \frac{K_{23}}{K_{\Phi B}} \frac{D_{M3}}{D} + d_1 (K_{23} - d_2 K_{24})$$

$$K_{23}^O = - \frac{K_{21}}{K_{\Phi A}} \frac{D_{M2}}{D} - \frac{K_{23}}{K_{\Phi B}} \frac{D_{M3}}{D} + K_{23} - d_2 K_{24}$$

$$K_{33}^O = d_2 \frac{K_{41}}{K_{\Phi A}} \frac{D_{M2}}{D} + (1 + d_2 \frac{K_{43}}{K_{\Phi B}}) \frac{D_{M3}}{D} + d_2 (-K_{43} + d_2 K_{44}) + \frac{1}{3} (K_S b_{\pi 2}) d_2^3$$

$$D_{M2} = (1 + \frac{K_{33}}{K_{\Phi B}}) (K_{13} - d_2 K_{14}) - \frac{K_{13}}{K_{\Phi B}} (K_{33} - d_2 K_{34})$$

$$D_{M3} = (1 + \frac{K_{11}}{K_{\Phi A}}) (K_{33} - d_2 K_{34}) - \frac{K_{31}}{K_{\Phi A}} (K_{13} - d_2 K_{14})$$

$$K_{14}^O = (1 - d_1 \frac{K_{21}}{K_{\Phi A}}) \frac{D_{M2}}{D} - d_1 \frac{K_{23}}{K_{\Phi B}} \frac{D_{M3}}{D} + d_1 K_{24}$$

$$K_{24}^O = - \frac{K_{21}}{K_{\Phi A}} \frac{D_{M2}}{D} - \frac{K_{23}}{K_{\Phi B}} \frac{D_{M3}}{D} + K_{24}$$

$$K_{34}^O = d_2 \frac{K_{41}}{K_{\Phi A}} \frac{D_{M2}}{D} + (1 + d_2 \frac{K_{43}}{K_{\Phi B}}) \frac{D_{M3}}{D} - d_2 [K_{44} + \frac{1}{2} (K_S b_{\pi 2}) d_2]$$

$$K_{44}^O = - \frac{K_{41}}{K_{\Phi A}} \frac{D_{M2}}{D} - \frac{K_{43}}{K_{\Phi B}} \frac{D_{M3}}{D} + K_{44} + (K_S b_{\pi 2}) d_2$$

$$D_{M2} = K_{14} (1 + \frac{K_{33}}{K_{\Phi B}}) - K_{34} \frac{K_{13}}{K_{\Phi B}}$$

$$D_{M3} = K_{34} (1 + \frac{K_{11}}{K_{\Phi A}}) - K_{14} \frac{K_{31}}{K_{\Phi A}}$$

$$D = [1 + \frac{K_{11}}{K_{\Phi A}}] [1 + \frac{K_{33}}{K_{\Phi B}}] - \frac{(K_{13})^2}{K_{\Phi A} K_{\Phi B}}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Winkler E., "Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit", Prag, Dominicus, 1867.
2. D. Aristizabal - Ochoa, «First and Second Order Stiffness Matrices and Load Vector of Beam - Columns with Semirigid Connections», **Journal of Structural Engineering**, Vol. **123**, No **5**, 669 – 678, 1997.
3. Hetenyi M., "Beams on Elastic Foundation", The University of Michigan Press, **University of Michigan Studies**, Scientific Series, Vol. **XVI**, Ann Arbor, 1946.
4. Malter H., "Numerical solutions for beams on elastic foundation", **Trans. ASCE** **125**, paper No **3042**, 757-791, 1960.
5. Iyengar, K.T.S.R. and Anatharamu, S., "Finite Beam-Columns on Elastic Foundation", **Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE**, Vol. **90**, No **EM6**, Proc. Paper **3720**, Dec., 139-160, 1963.
6. Miranda C. and Nair K., "Finite beams on elastic foundation", **J. Struct. Div. ASCE**, **92**, 131-142, 1966.
7. Selvadurai A.P.S., "Elastic analysis of soil-foundation interaction", Amsterdam, Oxford, New York, **Elsevier Scientific Publications**, 1979.

8. Avramidis, I.E. and Avramidou, M., "Steifigkeitsmatrizen für ein weg- und drehelastisch gebettetes finites Balkenelement zur allgemeiner rostförmiger Kreuzwerke". **DER STAHLBAU**, **12**, 374 – 377, 1979.

9. Avramidis, I.E., Golm, B., "Steifigkeitsmatrizen für elastisch gebettete Balkenelement", **DIE BAUTECHNIK** **57**, **H.5**, S. 171 – 173, 1980.

10. Avramidis, I.E., "Übertragungs- und Steifigkeitsmatrizen für den elastisch gebetteten Zug- und Druckstab nach der Theorie II. Ordnung". **DIE BAUTECHNIK** **59**, **H. 3**, S. 99 – 104, 1982 και **DIE BAUTECHNIK** **59**, **H. 4**, S. 140 – 143, 1982.

11. Αβραμιδής, Ι.Ε., "Ακριβή μητρώα δυσκαμψίας και μεταφοράς της ελαστικώς εδραζομένης δοκού με αξονικό φορτίο κατά τη θεωρία 2ης τάξης καθώς και για όλες τις υποπεριπτώσεις", Μονογραφία, **Επιστημονική Επετηρίδα της Πολυτεχνικής Σχολής του Α.Π.Θ., Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών**, τόμος **Θ**, 1982.

12. Ting B.Y., "Finite beams on elastic foundation with restraints", **J. Struct. Div. ASCE**, **108**, 611-621, 1982.

13. Ting B.Y. and Mockry E.F., "Beam on Elastic Foundation Finite Element", **Journal of Structural Engineering**, **110(10)**, 2324 – 2339, 1984.

14. Eisenberger M. and Yankelevsky D.Z., "Exact stiffness matrix for beams on elastic foundation", **Computers and Structures**, **21**, 1355 – 1359, 1985.

15. Essenburg F., "Shear Deformation in Beams on Elastic Foundations", **Journal of Applied Mechanics**, **29**, 313-317, 1962.

16. Djodjo B.A., "Transfer matrices for beams loaded axially and laid on an elastic foundation", **Aeronaut. Q.**, **20**, 281-306, 1969.

17. Cheng F.Y. and Pantelides C.P., "Static Timoshenko Beam-Column on Elastic Media", **Journal of Structural Engineering**, **114/No 5**, 1152-1172, 1988.

18. Aydogan M., "Stiffness-Matrix Formulation of Beams with Shear Effect on Elastic Foundation", **Journal of Structural Engineering**, **121/No 9**, 1265-1270, 1995.

19. Aristizabal - Ochoa. J. Dario, "Stability of columns under uniform load with semirigid connections", **J. Struct. Engrg., ASCE**, **120 (11)**, Nov., 3212 – 3222, 1994c.

20. Cunningham. R., "Some aspects of semi - rigid connections in structural steel – work", **Structural Engineering**, **68 (5)**, 85 – 92, 1990.

21. Xu L. and Grierson D. E., "Computer-automated design of semirigid steel frameworks", **Journal of Structural Engineering**, **119 (6)**, 1740 – 1760, 1993.

22. "Semi-Rigid connections in steel frames", Council on tall buildings and urban habitat. Committee 43, Mc Graw-Hill, New York, 1993.

23. E. E. Matheu and L. E. Suarez, "Eigenvalue analysis of structures with flexible random connections", **Structural Engineering and Mechanics**, Vol. **4**, No **3**, 277 – 301, 1996.

24. B. Coric, Z. Markovic, "Non – Linear Analysis of Steel Structures with Semi – Rigid Connections", **T196 – 6 Structural Engineering World Wide**, 1988.

25. Milicevic M., Zdravkovic S., Zlatkov D., Kostadinov B., "Matrix Formulation of Design and Testing of Structures with Semi – Rigid Connections", **T223 – 3 Structural Engineering World Wide**, 1998.

26. Milicevic M., Zdravkovic S., Zlatkov D., Mladenovic B., Igetic T., "Seismic analysis of structures with semi – rigid connections", **11th Euro-pean Conference on Earthquake Engineering**, Balkena, Rotterdam, 1998.

27. Ghali, A. and Neville, A.M., “Structural Analysis – A Unified Classical and Matrix Approach”, Chapman and Hall, London – New York, 3rd edition.
28. Wilson, E.L., Habibullah, A., “SAP90, A series of Computer Programs for the Finite Element Analysis of Structures”, User Manual, Revised May 1992, Computers and Structures Inc. Berkeley, California, USA, 1992.
29. Filonenko – Borodich, “Some Approximate Theories of Elastic Foundation”, (in Russian), **Uchenye Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta, Mechanics, No 46**, 3 – 18, 1940.
30. Pasternak P.L., “On a new Method of Analysis of an Elastic Foundation by Means of Two Constants”, (in Russian), **Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu i Arkhitekture**, Moscow, USSR, 1954.
31. Vlasov V.Z. and Leontiev U.N., “Beams, Plates, and Shells on Elastic Foundation”, (Translated from Russian), **Israel Program for Scientific Translations**, Jerusalem, 1966.
32. Kerr A.D., “On the formal development of elastic foundation models”, **Ingenieur – Archiv 54**, 455 – 464, 1984.
33. L. Stavridis, “Tragwerke auf elastischem Boden”, **BAUINGENIEUR**, **72**, 565 – 569, 1997.
34. Cheung Y.K. and Nag D.K., “Plates and Beams on Elastic Foundations – Linear and Non-Linear Behaviour”, **Geotechnique**, **18**, 250 – 260, 1968.

Ιωάννης Ε. Αβραμίδης,

Δρ πολιτικός μηχανικός, καθηγητής, Εργαστήριο Εφαρμοσμένης Στατικής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών Α.Π.Θ., 540 06 Θεσσαλονίκη, τηλ. 031 – 995623, e – mail: avram@civil.auth.gr

Κων/νος Μορφίδης,

Διπλ. πολιτικός μηχανικός, μεταπτυχιακός φοιτητής, Εργαστήριο Εφαρμοσμένης Στατικής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών Α.Π.Θ., 546 32, Θεσσαλονίκη, τηλ. 031 – 617373.

Extended summary

A Generalized Beam Element on a WINKLER Type Elastic Foundation

I. E. AVRAMIDIS
Professor A.U.TH.

K. MORFIDIS
Civil Engineer A.U.TH.

Abstract

A new generalized beam element on a continuous Winkler – type elastic foundation is presented in this paper. This element has the ability of optional consideration of shear deformation, semi-rigid connections, and rigid offsets. Additionally, the procedure for development of matrices of equivalent joint forces is presented. These matrices refer to uniform load and nonuniform temperature variation. The new element is considered as generalized because of its ability to degenerate to various simpler elements. This is accomplished by zeroing certain coefficients in the expressions of the stiffness matrix, or by forming their limit values. These abilities render the generalized element very useful in structural analysis computer programs where, with the aid of appropriate ‘switches’, it is possible to produce the desired element each time. The use of the new element in the analysis of reinforced concrete or steel structures is documented by two examples.

1. INTRODUCTION

The modeling and analysis of reinforced concrete or steel structures lead to some specific problems, namely:

- a. The analysis of foundation beams necessitates modeling the soil behaviour. The first approximation of this problem, which will be adopted in this paper, is based on the use of the well known Winkler model [1].
- b. The analysis of beams on a Winkler-type foundation demands the use of finite beam elements on a continuous elastic support. Moreover, it is important to consider the existence of footings at the column base and their effect on the calculation of stresses which are used for the design of the attached structural elements. These problems are usually dealt with by using conventional beam elements and applying the following technique: the continuous elastic support is replaced by an appropriate number of single springs, in between which a conventional beam element is placed, while the regions representing the footings are considered as rigid, and are modeled by beam elements, with very large values regarding their moment of inertia. This technique leads to results which diverge from the exact solution, because of discretization

of the continuous elastic support. Additionally, numerical instabilities may occur because of the use of very large values for the moment of inertia.

- c. In most cases, the use of the Timoshenko beam elements instead of the Bernoulli beam elements is essential, since the shear deformations of the foundation beams are by no means negligible. This demand arises when the height to length ratio of the beams assumes a relatively high value.
- d. The analysis of steel structures introduces some significant problems in the process of the modeling of beam – column joints. A problem of this type is the modeling of beams with flexible connections. The first approximation to this problem is accomplished by the use of beam elements which have rotational springs at their ends. Moreover, if it is necessary to take into account the rigidity of the joints, then a finite beam element with rigid offsets is necessary. The connection between the rigid offsets and the median segment of the element is settled by rotational springs (semi-rigid connections).

In the past, some solutions were given to the problems referred to above. However, these solutions do not consider the totality of the problems but each of them separately.

This paper aims to exhaustively address all these problems by means of a generalized finite beam element (fig. 1d). The element is based on the analytical solution of the differential equation which describes the problem of beams on elastic foundation, while featuring rigid offsets at its ends. The connection of rigid offsets to the interior element is implemented by means of rotational springs (semi-rigid connections). Due to the characteristics shown above, a single new element is required in order to model every span of a continuous beam.

2. DERIVATION OF STIFFNESS MATRIX AND LOAD VECTORS

The stiffness matrix is derived in two stages. In the first stage, the exact stiffness matrix of the median segment of the element is formed. This stiffness matrix is available in many

sources [8 – 17]. At the second stage (which is the main object of this paper) the equations that relate the terms of the stiffness matrix of the median segment of the element to the displacements of its nodes are formed. These equations demonstrate the effect of the rotational springs and of the rigid offsets (which are also elastically supported) on the stiffness matrix of the element.

The stiffness matrix is formed in a general way, such that permits the use of either the Bernouli or the Timoshenko beam theory. Moreover, it is possible to ignore either the rigid offsets or the semi-rigid connections. In order to fulfill these requirements, it is enough to set certain coefficients equal to zero, or to form their limit values.

Apart from the stiffness matrix, matrices of equivalent joint forces for uniform load and for nonuniform temperature variation are formed. These matrices are based (as is the stiffness matrix) on the exact solution of the governing differential equation of the problem. At first, the stresses due to the uniform load (or to nonuniform temperature variation) of an element with rotational springs at its nodes are calculated. Afterwards, these stresses are transmitted through the rigid offsets to the end nodes of the element.

Initially, the matrices of equivalent joint forces for the Timoshenko beam are formed, whereas the matrices for the Bernouli beam arise from the respective matrices of the Timoshenko beam by forming the limit values of the latter with regard to shear rigidity.

3. DERIVATION OF STIFFNESS MATRIX AND LOAD VECTORS

The stiffness matrix is derived in two stages. In the first stage, the exact stiffness matrix of the median segment of the element is formed. This stiffness matrix is available from many sources [8 – 17]. At the second stage (which is the main object of this paper) the equations that relate the terms of the stiffness matrix of the median segment of the element to the displacements of its nodes are formed. These equations demonstrate the effect of the rotational springs and of the rigid offsets (which are also elastically supported) on the stiffness matrix of the element.

The stiffness matrix is formed in a general way, such as to permit the use of either the Bernouli or the Timoshenko beam

theory. Moreover, it is possible to ignore either the rigid offsets or the semi-rigid connections. In order to fulfill these requirements, it is enough to set certain coefficients equal to zero, or to form their limit values.

Apart from the stiffness matrix, matrices of equivalent joint forces for uniform load and for nonuniform temperature variation are formed. These matrices are based (as is the stiffness matrix) on the exact solution of the governing differential equation of the problem. At first, the stresses due to the uniform load (or to nonuniform temperature variation) of an element with rotational springs at its nodes are calculated. Afterwards, these stresses are transmitted through the rigid offsets to the end nodes of the element.

Initially, the matrices of equivalent joint forces for the Timoshenko beam are formed, whereas the matrices for the Bernouli beam arise from the respective matrices of the Timoshenko beam by forming the limit values of the latter with regard to shear rigidity.

4. CONCLUSIONS

A new generalized Bernouli/Timoshenko beam element for use in reinforced concrete or steel structures analysis has been presented. This element possesses the following characteristics:

- a. Winkler type elastic support,
- b. Rigid offsets,
- c. Semi-rigid connections at the internal nodes.

These characteristics render this element very useful in structural analysis computer programs where, with the aid of appropriate “switches”, it is possible to produce the desired element each time.

The usefulness of the new element has been illustrated by two examples. These examples indicated:

- a. the eligibility of the new element for the analysis of any type of linear structures,
- b. the simplicity which it offers in the modeling of foundation beams and steel structures with semi-rigid connections, and
- c. its reliability, due to the fact that it is based on the exact solution of the differential equation which governs the problem of a beam on Winkler type elastic foundation.

Ioannis E. Avramidis,

Dr civil engineer, professor, Dept. of Civil Engineering, Division of Structural Engineering, Aristotle University of Thessaloniki, 540 06 Thessaloniki, tel. 031 - 995623, e-mail: avram@civil.auth.gr

Kostas Morfidis,

Civil engineer, postgraduate student, Dept. of Civil Engineering, Division of Structural Engineering, Aristotle University of Thessaloniki, 546 32 Thessaloniki, tel. 031 - 617373.